

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян, Г. А. Попов

О безграничной делимости времени ожидания в системе

$\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|_\infty$ с абсолютным приоритетом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 24/VI 1976)

В настоящем сообщении доказывается безграничная делимость (б. д.) стационарного распределения времени ожидания начала обслуживания вызовов i -го потока (i -вызовов) в системе $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|_\infty$ с разновидностями абсолютного приоритета.

Потоки вызовов $L_1, \dots, L_r$ независимые и пуассоновские. Параметр потока L_i есть $a_i > 0$. Длительность времени обслуживания i -вызова есть случайная величина (сл. в.) с функцией распределения (ф. р.) $B_i(t)$, $B_i(0) = 0$.

Промежутки между соседними поступлениями и длительности обслуживания вызовов в совокупности независимы.

Вызовы потока L_i имеют абсолютный приоритет перед вызовами потока L_j при $i < j$. Рассматриваются разновидности таких систем: а) с дообслуживанием прерванного вызова; б) потерей; в) обслуживанием заново.

Пусть $W_i(t)$ — стационарное распределение времени ожидания i — вызовом начала обслуживания. Положим:

$$\omega_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} dW_i(t), \quad z_i = a_1 + \dots + a_i.$$

Число ρ_{11} — загрузка системы вызовами потоков $L_1, \dots, L_1$.

Обозначим через $\Pi_i(t)$ ф. р. периода занятости (i — периода) обслуживанием вызовов потоков $L_1, \dots, L_i$, через $\Pi_{ij}(t)$ — ф. р. i — периода, начавшегося с обслуживания j — вызова ($j = \overline{1, i}$); через $H_i(t)$ — ф. р. промежутка, начинающегося с первого поступления на прибор i — вызова и кончающегося первым последующим моментом освобождения системы от этого i -вызова и вызовов потоков $L_1, \dots, L_{i-1}$.

Наконец, обозначим $\bar{\Pi}_i(t) = 1 - \Pi_i(t)$, $\bar{H}_i(t) = 1 - H_i(t)$.

1°. Пусть порядок обслуживания k — вызовов прямой.

Теорема 1 а) $\omega_k(s)$ есть преобразование Лапласа-Стилтьеса (п. Л. — С) б. д. с л. в..

б) Каноническое представление для $\omega_k(s)$ имеет вид

$$\omega_k(s) = \exp \left| - \int_0^\infty x^{-1} (1 - e^{-sx}) \Lambda_k(dx) \right|, \quad (1)$$

где мера Λ_k при $\rho_{k-1} < \frac{1}{2}$ равна

$$\Lambda_k((-\infty, t]) = G_k(t) + \sigma_{k-1} \tilde{\Pi}_{k-1}(t) * \sum_{n \geq 0} (-\sigma_{k-1})^n \left[\tilde{\Pi}_{k-1}(t) \right]_*^n \quad (2)$$

а при $\rho_{k-1} > \frac{1}{2}$

$$\Lambda_k((-\infty, t]) = G_k(t) + \pi_{k-1}^{-1} \tilde{\Pi}_{k-1}(t) * \sum_{n \geq 0} \alpha_{kn}(t). \quad (3)$$

Здесь $*$ — знак свертки, и обозначено

$$G_k(t) = a_k \tilde{H}_k(t) * \sum_{n \geq 0} a_k^n \left[\tilde{H}_k(t) \right]_*^n, \quad \tilde{H}_k(t) = \int_0^t \bar{H}_k(u) du,$$

$$\tilde{H}_k(t) = \int_0^t u \bar{H}_k(u) du, \quad \tilde{\Pi}_{k-1}(t) = \int_0^t \bar{\Pi}_{k-1}(u) du, \quad \tilde{\Pi}_{k-1}(t) = \int_0^t u \bar{\Pi}_{k-1}(u) du,$$

$\chi(t)$ — функция Хевисайда, $\alpha_{kn}(t) = \left| \pi_{k-1}^{-1} \tilde{\Pi}_{k-1}(t) - (1 - \rho_{k-1})^{-1} \chi(t) \right|_*^n$.

Доказательство. Введем п. Л. — С.

$$\pi_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\Pi_k(t), \quad \pi_{ki}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\Pi_{ki}(t), \quad h_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} dH_k(t).$$

Известно ⁽¹⁾

$$\omega_k(s) = \frac{(1 - \rho_{k1}) \cdot \mu_k(s)}{s - a_k + a_k h_k(s)}, \quad h_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} dB_1(t), \quad (4)$$

$$\pi_{kk}(s) = h_k(y_k), \quad \sigma_k \pi_k(s) = \sigma_{k-1} \pi_{k-1}(y_k) + a_k \pi_{kk}(s),$$

где

$$\mu_k(s) = s + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1} \pi_{k-1}(s), \quad y_k = s + a_k - a_k \pi_{kk}(s).$$

Конкретный вид функций $h_k(s)$, приведенный в ⁽¹⁾, нам не понадобится.

Заметим, что $P(z) = (1 - \rho)(1 - \rho z)^{-1}$, $0 < \rho < 1$, есть производящая функция геометрического распределения, которое б. д.. Но так как

$$0 \leq a_k h_{k1} = -a_k h_k(0) < 1 \text{ (см. } ^{(1)}) \text{ и}$$

$$\gamma_k(s) \stackrel{\text{def}}{=} (sh_{k1})^{-1}(1-h_k(s)) = h_{k1}^{-1} \int_0^\infty e^{-st} \bar{H}_k(t) dt$$

является п. Л. — С. неотрицательной сл. в., то на основании (2), стр. 532, зад. 17 $P(\gamma_k(s)) = (1-a_k h_{k1})(1-a_k h_{k1} \gamma_k(s))^{-1}$ есть п. Л. — С. некоторой неотрицательной б. д. сл. в..

Теперь рассмотрим функцию

$$\varphi_k(s) = [(1-p_{k1})/(1-a_k h_{k1})] \cdot [\mu_k(s)/s] \stackrel{\text{def}}{=} d_k [\mu_k(s)/s].$$

Покажем, что $\varphi_k(s)$ есть п. Л. — С. некоторой б. д. сл. в. Утверждение будем доказывать методом математической индукции по k . Вследствие $\mu_1(s) = s$ основание индукции очевидно. Из формул (4) имеем

$$\begin{aligned} d_{n+1} \frac{\mu_{n+1}(s)}{s} &= d_{n+1} \frac{y_n + a_{n-1} - a_{n-1} \pi_{n-1}(y_n)}{y_n} \cdot \frac{y_n}{s} = \\ &= d_n \frac{\mu_n(y_n)}{y_n} \cdot \frac{d_{n+1}}{d_n} \cdot \frac{y_n}{s} \end{aligned} \quad (5)$$

По предположению индукции $d_n \frac{\mu_n(s)}{s}$ есть п. Л. — С. б. д. сл. в. В силу (2), стр. 516 $\frac{d}{ds} \ln \frac{s}{\mu_n(s)}$ есть вполне монотонная функция (вп. м. ф.). Но $y_n \geq 0$ и $y'_n(s)$ — вп. м. ф., следовательно, вп. м. ф. будет также функция $\frac{d}{ds} \ln \frac{y_n}{\mu_n(y_n)}$, то есть функция $d_n \frac{y_n}{\mu_n(y_n)}$ есть п. Л. — С. б. д. сл. в. Далее, так как $P(\gamma_n(s))$ есть п. Л. — С. б. д. сл. в., то в силу (1)

$$\begin{aligned} P(\gamma_n(y_n)) &= \frac{(1-a_n h_{n1})y_n}{y_n - a_n + a_n h_n(y_n)} = \frac{(1-a_n h_{n1})y_n}{y_n - a_n + a_n \pi_{nn}(s)} = \\ &= (1-a_n h_{n1}) \frac{y_n}{s} \end{aligned}$$

также есть п. Л. — С. б. д. сл. в.

Из (5) получаем, что $d_{n+1} \frac{\mu_{n+1}(s)}{s}$, как произведение п. Л. — С. двух б. д. сл. в., само есть п. Л. — С. б. д. сл. в..

Найдем каноническое представление для $\omega_k(s)$.

В силу (2), стр. 517, $\omega_k(s)$ представимо в виде (1), где мера Λ_k удовлетворяет условиям $\int_0^\infty x^{-1} \Lambda_k(dx) < \infty$ и $\Lambda_k(A) < \infty$ для любого ограниченного множества A .

В (1) показано: при $\rho_{k-1} < 1$ $\sigma_{k-1}\pi_{k-1} = \frac{\rho_{k-1}}{1-\rho_{k-1}}$. Неравенство $\sigma_{k-1}\pi_{k-1} < 1$ ($\sigma_{k-1}\pi_{k-1} > 1$) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\rho_{k-1} < \frac{1}{2} \quad \left(\rho_{k-1} > \frac{1}{2} \right).$$

Положим

$$A_k = a_k h_{k1}(-\gamma_k(s)) \cdot |1 - a_k h_{k1} \gamma_k(s)|^{-1},$$

$$B_k = \sigma_{k-1} (\mu_k(s))^{-1} \{1 - \pi_{k-1}(s) + s \pi'_{k-1}(s)\}.$$

Тогда

$$\lambda_k(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-st} \Lambda_k(dt) = \frac{d}{ds} \ln \frac{1}{\omega_k(s)} = A_k + B_k.$$

Нетрудно заметить, что

$$B_k = \sigma_{k-1} \left[- \left(\frac{1 - \pi_{k-1}(s)}{s} \right)' \right] \cdot \left(\frac{\mu_k(s)}{s} \right)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{\Pi}_{k-1}(t) dt \cdot \left(1 + \sigma_{k-1} \frac{1 - \pi_{k-1}(s)}{s} \right)^{-1}.$$

Отсюда при $\rho_{k-1} < \frac{1}{2}$ получаем

$$B_k = \sigma_{k-1} \int_0^{\infty} e^{-st} \bar{\Pi}_{k-1}(t) dt \cdot \sum_{n \geq 0} (-\sigma_{k-1})^n \int_0^{\infty} e^{-st} d \left[\bar{\Pi}_{k-1}(t) \right]_*^n$$

и в силу (2), стр. 317, замеч. 2 получаем

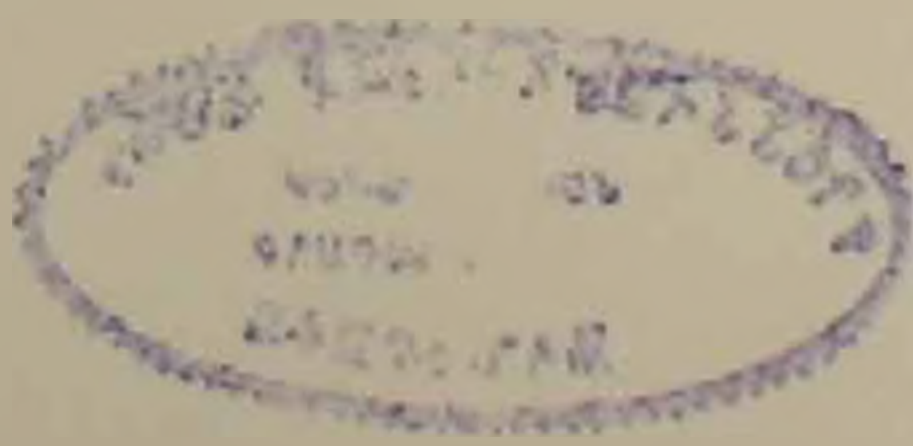
$$B_k = \int_0^{\infty} e^{-st} d \left\{ \sigma_{k-1} \bar{\Pi}_{k-1}(t) * \sum_{n \geq 0} (-\sigma_{k-1})^n \left[\bar{\Pi}_{k-1}(t) \right]_*^n \right\}.$$

Подобным же образом преобразуется A_k .

Окончательно, находим $\lambda_k(s)$ при $\rho_{k-1} < \frac{1}{2}$, которое удастся обратить и получить (2).

При $\rho_{k-1} > \frac{1}{2}$ представим B_k в следующем виде:

$$B_k = \sigma_{k-1} \int_0^{\infty} e^{-st} d \bar{\Pi}_{k-1}(t) \cdot C_k$$



где

$$C_k \stackrel{\text{def}}{=} |1 + \pi_{k-1} s^{-1} (1 - \pi_{k-1}(s))|^{-1} = (\rho_{k-1}^{-1} - 1) |1 + (s \pi_{k-1})^{-1} (1 - \pi_{k-1}(s)) - (1 - \rho_{k-1})^{-1}|$$

Поскольку

$$\left| \frac{1 - \pi_{k-1}(s)}{s \pi_{k-1}} - (1 - \rho_{k-1})^{-1} \right| \leq \max(\rho_{k-1}^{-1} - 1, (1 - \rho_{k-1})^{-1}) < 1,$$

то

$$C_k = (\rho_{k-1}^{-1} - 1) \sum_{n \geq 0} \int_0^\infty e^{-st} d\alpha_{kn}(t).$$

$$\text{Так как } \max_m \text{Var} \sum_{n=0}^m \alpha_{kn}(x) \leq \max_m \sum_{n=0}^m (|\lim_{x \rightarrow x} \alpha_{kn}(x)| + |\lim_{x \rightarrow 0} \alpha_{kn}(x)|) < \infty,$$

то в силу (3), стр. 317, замеч. 2 получаем

$$C_k = \int_0^\infty e^{-st} d[(\rho_{k-1}^{-1} - 1) \sum_{n \geq 0} \alpha_{kn}(t)],$$

что и т. д..

$$\text{З а м е ч а н и е 1} \quad \text{Положим } \bar{\Lambda}_k(A) = \Lambda_k(A \setminus \{0\}), \quad D_k(dx) = \frac{x}{1+x^2} \bar{\Lambda}_k(dx).$$

Тогда

$$D_k(\{0\}) = 0, \quad D_k((-\infty, +\infty)) = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} \Lambda_k(dx) < \infty.$$

$$\int_0^\infty x^{-1} D_k(dx) = \int_0^\infty (1+x^2)^{-1} \bar{\Lambda}_k(dx) < \infty.$$

Переписав (1) в виде

$$\omega_k(s) = \exp \left\{ \int_0^\infty \left(e^{-sx} - 1 + \frac{sx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} D_k(dx) - s \int_0^\infty x^{-1} D_k(dx) \right\},$$

получаем представление Леви—Хинчина для $\omega_k(s)$.

2°. Обозначим через $\omega_k^{(u)}(t)$ виртуальное время ожидания в нашей системе в момент t , если порядок обслуживания k — вызовов инверсионный. При этом предполагаем, что прерванный k — вызов имеет преимущество в обслуживании перед другими k — вызовами.

Теорема 2. $\omega_k^{(u)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} M e^{-s \omega_k^{(u)}(t)}$ является п. Л. — С. б. д. сл. в.

Доказательство. Пусть $\omega_n(t)$ — виртуальное время ожидания в момент t n — вызова при прямом порядке обслуживания вызовов каждого из первых n потоков. Обозначим через $\xi_1^{(n+1)}, \xi_2^{(n+1)}, \dots, \xi_n^{(n+1)}, \dots$ последовательность независимых одинаково распределенных сл. в., имеющих ф. р. периода занятости системы $M|G|1|\infty$ с интенсивностью $a_n + a_{n+1}$ входящего потока и ф. р. $B(t) = \frac{a_n}{a_n + a_{n+1}} B_n(t) + \frac{a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} B_{n+1}(t)$ длительности обслуживания вызовов.

Имеет место равенство

$$\omega_{n+1}^{(u)}(t) \stackrel{d}{=} \omega_n(t) + \xi_1^{(n+1)} + \dots + \xi_{\omega_n(t)}^{(n+1)}. \quad (6)$$

Здесь равенство понимается в смысле совпадения ф. р. обеих сторон (6), а $\omega(x)$ — сл. в. числа n — вызовов и $(n+1)$ — вызовов, поступивших в систему за время t .

Введем обобщенный пуассоновский процесс со сносом ⁽¹⁾, стр. 223

$$X_{n+1}(t) = t + \xi_1^{(n+1)} + \dots + \xi_{\omega_n(t)}^{(n+1)}.$$

Тогда $\omega_{n+1}^{(u)}(t) \stackrel{d}{=} X_{n+1}(\omega_n(t))$, то есть $\omega_{n+1}^{(u)}(t)$ подчинен $X_{n+1}(t)$ с направляющим процессом $\omega_n(t)$. Поскольку обобщенный пуассоновский процесс со сносом б. д., то при б. д. $\omega_n(t)$ таковым же в силу ⁽²⁾, стр. 518 будет $\omega_{n+1}^{(u)}(t)$. Следовательно, используя теорему 1, утверждение теоремы 2 становится очевидным.

З а м е ч а н и е 2. Каноническое представление в данном случае получается аналогично, но вид его довольно громоздок.

3°. Естественным образом возникает вопрос: является ли б. д. стационарное распределение времени ожидания в других приоритетных системах?

Рассмотрим, например, систему $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ с относительным приоритетом. Поскольку $\omega_r(s), \omega_r^{(u)}(s)$ в данной системе и в системе с дообслуживанием совпадают, то на основании теоремы 1 заключаем

С л е д с т в и е 1. Для систем с относительным приоритетом прямым и инверсионным порядком обслуживания вызовов $\omega_r(s), \omega_r^{(u)}(s)$ есть п. Л. — С. б. д. сл. в.,

З а м е ч а н и е 3. В системе с относительным приоритетом для потоков $L_1, \dots, L_{r-1}$ времена ожидания, вообще говоря, не б. д..

Для доказательства этого утверждения возьмем $r=2, \beta_{11}=\beta_{21}=1, \beta_2(s)=e^{-s}$. Тогда из ⁽⁴⁾, стр. 111,

$$\omega_1(s) = \frac{[1 - (a_1 + a_2)]s + a_2[1 - \beta_2(s)]}{s - a_1 + a_1\beta_1(s)}. \quad (7)$$

Предположим, что $\omega_1(s)$ б. д. без каких-либо дополнительных ограничений. Поскольку предел б. д. сл. в. является б. д. сл. в., то, устремляя в (7) $a_1 \rightarrow 0$, $a_2 \rightarrow 1$ ($a_1 + a_2 < 1$), находим: $\lim_{a_1 \rightarrow 0, a_2 \rightarrow 1} \omega_1(s) = s^{-1}(1 - e^{-s})$, что является п. л. — С. равномерного на $[0, 1]$ распределения, которое не б. д..

З а м е ч а н и е 4. Для систем с абсолютным и относительным приоритетом $\omega_k(s)$ не есть П. Л. — С. устойчивого закона ($k = \overline{1, r}$).

Действительно, устойчивые сл. в. не имеют скачков в нуле, что следует из их канонического представления. Но

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \omega_k(s) = \begin{cases} 1 - p_{k1}, & \text{абсолютный приоритет.} \\ 1 - p_{r1}, & \text{относительный приоритет.} \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 5. Рассмотрим процесс восстановления, образованный точками начал k — периодов. П. Л. — С. функции восстановления указанного процесса равно $\pi_k(s) \frac{\sigma_k}{s + \sigma_k}$. Известно ((²), стр. 434), что

у процесса восстановления с функцией восстановления $B(t)$ в стационарном режиме ф. р. остаточного и прошедшего времени ожидания равны $m^{-1} \int_0^t (1 - B(u)) du$ ($m = \int_0^\infty (1 - B(u)) du$), и, следовательно, их п.

Л. — С. равны $(ms)^{-1}(1 - \beta(s))$, где $\beta(s) = \int_0^\infty e^{-st} dB(t)$. Отсюда следует, что п. Л. — С. времени, прошедшего с момента начала последнего перед данным моментом k — периода, а также времени до начала следующего k — периода, равны

$$\frac{1 - \pi_k(s)\sigma_k \cdot (s + \sigma_k)^{-1}}{(\sigma_k^{-1} + \pi_{k1})s} = \frac{\mu_k(s) \cdot s^{-1}}{1 + \sigma_k \pi_{k1}} \cdot \frac{\sigma_k}{s + \sigma_k},$$

и, значит, б. д. как произведение б. д. сомножителей.

Авторы признательны Б. С. Нахапетяну за ценные замечания, сделанные при чтении рукописи.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР

Է. Ա. ԴԱՆԻՆԻՑԱՆ, Գ. Ա. ԳՈՊՈՎ

Բացարձակ նախապատվությունը $M_r/G_r|1|^\infty$ սխտեմի սպասման ժամանակի անվերջ բաժանելիությունը մասին

Աշխատանքում ապացուցված է $M_r/G_r|1|^\infty$ սխտեմի i -րդ ($i = \overline{1, r}$) հոսքի պահանջի սպասման ժամանակի անվերջ բաժանելիությունը բացարձակ նախապատվության տարրերակների համար i -րդ հոսքի պահանջների

ինչպես ուղիղ կարգով սպասարկելու դեպքում, այնպես էլ ինվերսիոն:

Ստացված են դիտարկվող սպասման ժամանակների էնթալպիայի կանոնի վերլուծությունները:

Նույն տիպի սխեմանում, ուր ընդունված է հարաբերական նախապատվության դիսցիպլին, r -րդ հոսքի պահանջների սպասման ժամանակն անվերջ բաժանելի է, եթե այդ հոսքի պահանջների սպասարկման կարգն ուղիղ է: Սակայն մնացած հոսքերի պահանջների սպասման ժամանակներն ընդհանրապես անվերջ բաժանելի չեն, ինչ ցույց է տալիս աշխատանքում բերված օրինակը: Վերահիշյալ դիսցիպլինների դեպքում դիտարկվող սպասման ժամանակները կայուն չեն:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Э. А. Даниелян, «Известия АН Арм. ССР», Математика, X, № 3, 1975 г. ² В. Феллер, Введение в теорию вероятности и ее приложения, «Мир», т. 2, М., 1967. ³ Г. Е. Шолов, Математический анализ. Специальный курс. ГИФМЛ, М., 1961. ⁴ Б. В. Гнеденко и др. Приоритетные системы обслуживания, МГУ, М., 1973.