

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Никишин, Г. С. Шапиро

Контактные задачи теории упругости с
односторонними связями

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 21/VIII 1976)

Традиционная постановка контактной задачи предполагает наличие полного контакта плоского или выпуклого кругового или кольцевого в плане штампа с упругой средой. Обнаружено (^{1,2}), что в случае слоистой среды при определенных характеристиках, например, когда первый (верхний) слой достаточно тонкий, но более жесткий, чем второй, условие полного контакта без сцепления приводит к появлению на площадке контакта растягивающих напряжений в некоторой круговой или кольцевой области. Это явление объясняется заметным изгибом первого слоя, в результате чего, при отсутствии связей, слой отстанет от основания штампа в некоторой внутренней области. В таком случае, если допустить полный контакт, то естественно также ожидать появления растягивающих контактных напряжений и при изгибе однородного слоя под действием кругового или кольцевого штампа. Вместе с тем ясно, что в случае несцепленного штампа растягивающие контактные напряжения недопустимы, и их появление свидетельствует о необходимости иной постановки задачи, предусматривающей возможность отставания упругой среды от основания штампа в некоторой круговой или кольцевой области, размеры которой подлежат определению. Причем, если выяснено, что упругая среда отстает от основания штампа в круговой области, то задаче о круговом штампе соответствует задача о кольцевом в плане штампе с неизвестным внутренним радиусом, подлежащим определению из условия равенства нулю контактного давления на внутреннем контуре площадки контакта.

В статье показана возможность появления растягивающих контактных напряжений на конкретных примерах слоистых сред при наличии полного контакта с ними кругового или кольцевого штампа и даны новые решения контактных задач о сжатии слоистых сред и об изгибе однородного слоя под действием кругового и кольцевого штампов с учетом отставания упругой среды от их оснований.

1. Сжатие слоистых сред под действием кругового или кольцевого штампов. В качестве слоистой среды для простоты возьмем пакет из двух скрепленных между собой слоев, лежащий без трения на недеформируемом основании. Пакет характеризуется параметрами $\delta_1 = \delta_2/E_2$, $\lambda_1 = \delta_1(1+\nu_2)/(1+\nu_1)$, $t_1 = H_1/H$, где E_i , ν_i ($i = 1, 2$) — модули упругости и коэффициенты Пуассона первого и второго слоев, H — общая толщина пакета, H_1 — толщина первого слоя. Примем начало отсчета цилиндрической системы координат r, z на нижней граничной плоскости пакета и направим ось Oz вверх. Пусть на верхней граничной плоскости $z = H$ действует кольцевой штамп $a \leq r \leq b$ с плоским основанием. Введем безразмерные переменные $\rho = r/b$, $t = z/H$ и запишем краевые условия задачи

$$\frac{E_1 w_1(\rho, t)}{(1+\nu_1)b} \Big|_{t=1} = -h \quad (\rho_0 \leq \rho \leq 1) \quad (1.1)$$

$$\sigma_{z1}(\rho, t) \Big|_{t=1} = 0 \quad (0 \leq \rho < \rho_0, \quad 1 < \rho < \infty),$$

где $h = \delta E_1/b(1+\nu_1)$, δ — глубина погружения штампа. Характерными параметрами задачи являются $\lambda = \Delta H_1/b$ ($\Delta H_1 = H - H_1$ — толщина первого слоя) и $\rho_0 = a/b < 1$. В случае кругового штампа условия (1.1) берутся при $\rho_0 = 0$.

Решение контактной задачи (1.1) для кругового штампа получено в (1,2). На рис. 1 изображены графики интенсивности давления штампа $\sigma^* = \sigma_{z1}(\rho, 1)/h$ для двухслойного пакета с параметрами $\delta_1 = 100$, $t_1 = 0,95$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ и цикла значений $\lambda = 0,05; 0,1; 0,2; 0,5 (0,25)2$. На этих графиках видно, что при $\lambda \geq 1,75$ σ^* качественно имеет такой же вид, как в случае однородного слоя, а при $\lambda \leq 1,5$ возникают круговые области растягивающих (положительного знака) напряжений, которые при убывании λ , начиная с некоторого момента, концентрируются вблизи контура площадки контакта.

Решение задачи (1.1) для кольцевого штампа дается в двух разных формах, совпадающих в численном виде. В первом случае задача (1.1) сводится к интегральному уравнению для $\varphi_1(x)$ (2)

$$\pi(1-\nu_1)\sqrt{x-\rho_0}\varphi_1(x) + \int_{\rho_0}^1 \frac{K_1(x,t)}{\sqrt{t-\rho_0}} \varphi_1(t) dt = -\frac{hx}{\sqrt{x+\rho_0}}, \quad (1.2)$$

где

$$K_1(x,t) = xt \left[\frac{2(1-\nu_1)M_1(x,t)}{\pi\sqrt{(x+\rho_0)(t+\rho_0)}} + \int_0^\infty \Delta(\beta)l_1(x,\beta)l_1(t,\beta)d\beta \right], \quad (1.3)$$

$$M_1(x,t) = \frac{1}{x^2-t^2} \left[\frac{x^2-\rho_0^2}{x} \ln \frac{x+\rho_0}{x-\rho_0} - \frac{t^2-\rho_0^2}{t} \ln \frac{t+\rho_0}{t-\rho_0} \right], \quad (1.4)$$

$$l_1(x, \beta) = \frac{J_0(\rho_0 \beta)}{\sqrt{x + \rho_0}} - \beta \sqrt{x - \rho_0} \int_{\rho_0}^x \frac{J_1(\rho \beta)}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} d\rho, \quad (1.5)$$

а $\Delta(\beta)$ — известная функция, убывающая на бесконечности по экспоненциальному закону. Во втором случае задача (1.1) сводится к интегральному уравнению для $\varphi_2(x)$ (2).

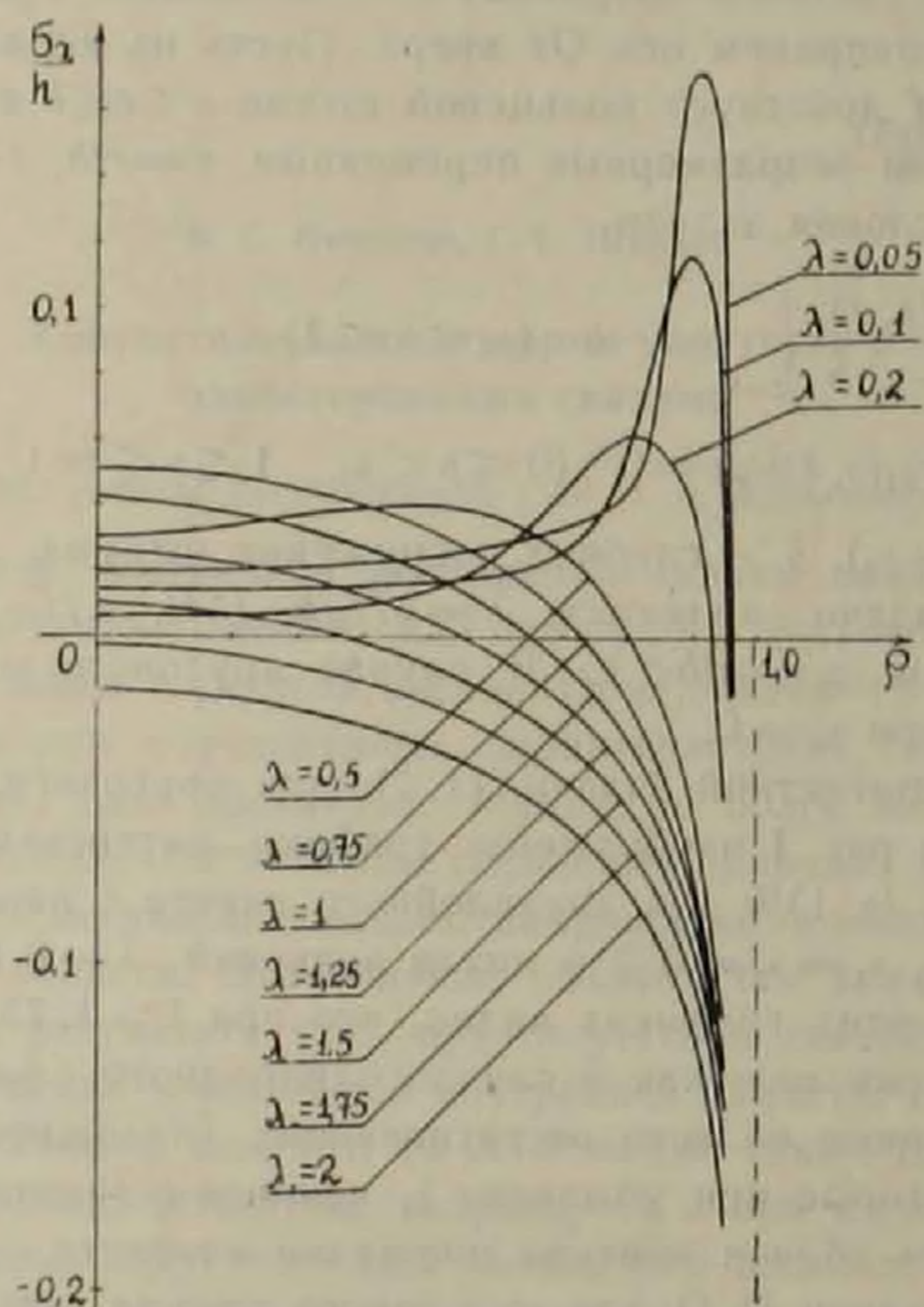


Рис. 1

$$\pi(1-\nu_1)\sqrt{1-x}\varphi_2(x) + \int_{\rho_0}^1 \frac{K_2(x, t)}{\sqrt{1-t}} \varphi_2(t) dt = -\frac{hx}{\sqrt{1+x}}, \quad (1.6)$$

где

$$K_2(x, t) = xt \left[\frac{2(1-\nu_1)M_2(x, t)}{\pi\sqrt{(1+x)(1+t)}} + \int_0^\infty \Delta(\beta) l_2(x, \beta) l_2(t, \beta) d\beta \right], \quad (1.7)$$

$$M_2(x, t) = \frac{1}{x^2 - t^2} \left[\frac{1-x^2}{x} \ln \frac{1-x}{1+x} - \frac{1-t^2}{t} \ln \frac{1-t}{1+t} \right], \quad (1.8)$$

$$l_2(x, \beta) = \frac{J_0(\beta)}{\sqrt{1+x}} + \beta \sqrt{1-x} \int_x^1 \frac{J_1(\rho \beta)}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} d\rho, \quad (1.9)$$

Интенсивность давления штампа $p(\rho) = \sigma_{z1}(\rho, 1)$ выражается через функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ по формулам:

$$p(\rho) = \frac{\varphi_1(\lambda, 1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{\varphi_1'(\lambda, y)}{\sqrt{y^2-\rho^2}} dy, \quad (1.10)$$

$$p(\rho) = \frac{\varphi_2(\lambda, \rho_0)}{\sqrt{\rho^2-\rho_0^2}} + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\varphi_2'(\lambda, y)}{\sqrt{\rho^2-y^2}} dy, \quad (1.11)$$

в которых в явном виде выделены особенности на внешнем $\rho=1$ и внутреннем $\rho=\rho_0$ контурах площадки контакта и подчеркнута очевидная зависимость $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ от параметра λ , т. е. $\varphi_1(x) = \varphi_1(\lambda, x)$, $\varphi_2(x) = \varphi_2(\lambda, x)$. Явное выделение особенностей $p(\rho)$ на обоих контурах кольцевой площадки контакта и явилось целью дублирования решения задачи (1.1) Используя оба подхода, реализовано численное решение задачи (1.1) о давлении кольцевого штампа на двухслойный пакет. Расчеты проводились при параметрах $\lambda_1 = 100$, $t_1 = 0,95$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\rho_0 = 0,5$. На рис. 2 показаны графики осевых перемещений $w^* = 1 + E_1 w_1 / (1 + \nu_1) b h$ и интенсивности давления штампа $\sigma^* = p(\rho)/h$ на внешней поверхности пакета при $\lambda = 0,5; 1,418; 2$. Случай

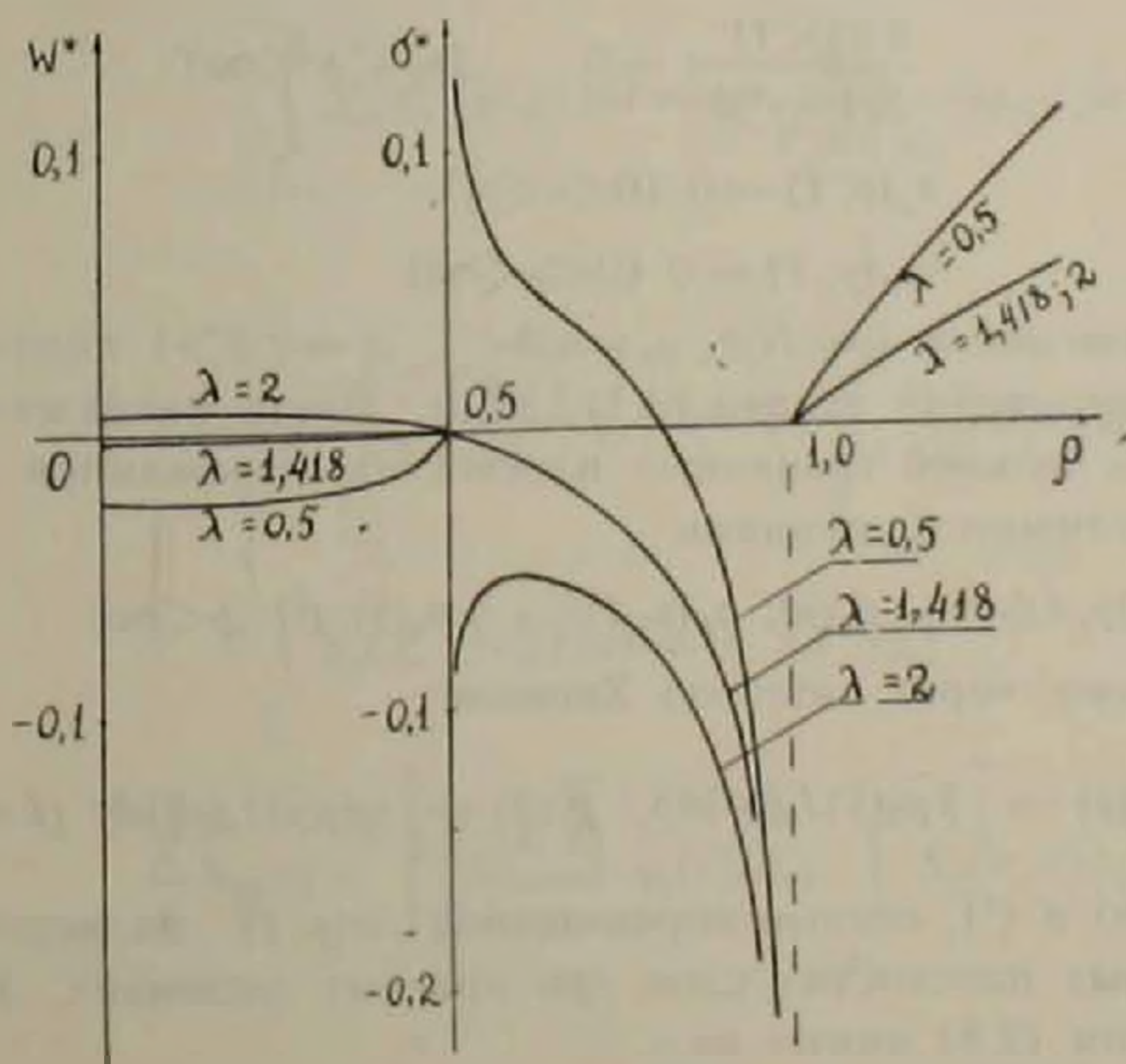


Рис. 2

чай $\lambda=2$ качественно соответствует однородному слою. В случае $\lambda=0,5$ вблизи внутреннего контура площадки контакта возникают растягивающие (положительного знака) напряжения σ^* , обраща-

ющиеся в $+\infty$ на самом контуре $\rho = \rho_0^* = 0,5$. Для фиксированного $\rho_0 = \rho_0^*$ величина $\lambda = 1,418$ определяется из условия $\varphi_2(\lambda, \rho_0^*) = 0$ и соответствует случаю $p(\rho_0^*) = 0$, когда реализуются решения задач о давлении на пакет кругового штампа или кольцевых штампов при $\rho_0 < \rho_0^*$ с учетом отхода упругой среды от их оснований соответственно в круге $0 \leq \rho < \rho_0^*$ или кольце $\rho_0 \leq \rho < \rho_0^*$, что подтверждается графиком осевых перемещений w^* при $\lambda = 1,418$.

2. Осесимметричный изгиб слоя под действием кругового или кольцевого штампа. Пусть бесконечный слой произвольной толщины H закреплен на верхней и нижней граничных плоскостях при $r > c$ и на его верхней граничной плоскости действует кольцевой штамп $a \leq r \leq b$ с плоским основанием, причем $b < c$. Примем начало отсчета цилиндрической системы координат r, z на нижней граничной плоскости слоя и пусть ось Oz совпадает с осью штампа и направлена вверх. Введем безразмерные переменные $\rho = r/b$, $t = z/H$ и зададим краевые условия задачи следующими равенствами:

$$\text{при } t = 1: \quad \frac{Ew(\rho, t)}{2(1-\nu^2)b} = \begin{cases} -h & (\rho_0 \leq \rho \leq 1) \\ 0 & (\rho_1 < \rho < \infty) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\sigma_z(\rho, t) = 0 \quad (0 \leq \rho < \rho_0, \quad 1 < \rho < \rho_1); \quad (2.2)$$

$$\tau_{rz}(\rho, t) = 0 \quad (0 \leq \rho < \infty) \quad (2.3)$$

$$\text{при } t = 0: \quad \frac{Ew(\rho, t)}{2(1-\nu^2)b} = 0 \quad (\rho_1 < \rho < \infty) \quad (2.4)$$

$$\sigma_z(\rho, t) = 0 \quad (0 \leq \rho < \rho_1); \quad (2.5)$$

$$\tau_{rz}(\rho, t) = 0 \quad (0 \leq \rho < \infty) \quad (2.6)$$

Величины отношений $\lambda = H/b$, $\rho_0 = a/b < 1$, $\rho_1 = c/b > 1$ являются характерными параметрами задачи (2.1)–(2.6). Пусть напряжения $\sigma_z(\rho, t)$ на верхней и нижней граничных плоскостях выражаются некоторыми пока неизвестными функциями

$$\sigma_z(\rho, t)|_{t=1} = p_1(\rho), \quad \sigma_z(\rho, t)|_{t=0} = p_0(\rho) \quad (0 \leq \rho < \infty) \quad (2.7)$$

представимыми через интеграл Ханкеля:

$$p_i(\rho) = \int_0^\infty \beta \bar{p}_i(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \quad \bar{p}_i(\beta) = \int_0^\infty \rho p_i(\rho) J_0(\rho\beta) d\rho \quad (i=0, 1) \quad (2.8)$$

Как показано в (3), осевые перемещения $w(\rho, t)$ на верхней и нижней граничных плоскостях слоя при краевых условиях (2.3), (2.6), (2.7) с учетом (2.8) имеют вид:

$$\frac{Ew(\rho, t)}{2(1-\nu^2)b} \Big|_{t=1} = \int_0^\infty \Delta_{11}(\beta) \bar{p}_1(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta - \int_0^\infty \Delta_{10}(\beta) \bar{p}_0(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \quad (2.9)$$

$$\frac{Ew(\rho, t)}{2(1-\nu^2)b} \Big|_{t=0} = \int_0^\infty \Delta_{01}(\beta) \bar{p}_1(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta - \int_0^\infty \Delta_{00}(\beta) \bar{p}_0(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \quad (2.10)$$

где $\Delta_{ij}(\beta)$ ($i, j = 0, 1$) — известные функции, причем $\Delta_{ii}(\beta) = 1$ ($i = 0, 1$), $\Delta_{01}(\beta)$, $\Delta_{10}(\beta)$ убывают на бесконечности по экспоненциальным законам. Заметим, что при получении формул (2.9)–(2.10) в работе (2) был устранен математический дефект, связанный с расходимостью интеграла Ханкеля для осевых перемещений слоя $w(\rho, t)$ даже в случае статически уравновешенных нагрузок (2.7) на его верхней и нижней поверхностях.

Подставляя (2.7)–(2.10) в краевые условия (2.1)–(2.2), (2.4), (2.5), получаем систему парных интегральных уравнений относительно $\bar{p}_0(\beta)$ и $\bar{p}_1(\beta)$. Затем система парных интегральных уравнений известными методами, изложенными в работах (2,3), сводится к системе линейных интегральных уравнений для трех неизвестных функций двух разных видов, позволяющих выделить особенности на обоих контурах площадки контакта кольцевого штампа со слоем, как в I в задаче для пакета слоев. В первом случае система линейных интегральных уравнений для новых неизвестных функций $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\theta_1(x)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sqrt{x - \rho_0} \varphi_1(x) + \int_{\rho_0}^1 \frac{S_1(x, t)}{\sqrt{t - \rho_0}} \varphi_1(t) dt + \int_{\rho_1}^{\infty} S_2(x, t) \psi_1(t) dt + \\ + \int_{\rho_1}^{\infty} S_3(x, t) \theta_1(t) dt = - \frac{hx}{\sqrt{x + \rho_0}} \quad (\rho_0 < x < 1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \psi_1(x) + \int_{\rho_0}^1 \frac{S_4(x, t)}{\sqrt{t - \rho_0}} \varphi_1(t) dt + \int_{\rho_1}^{\infty} S_5(x, t) \psi_1(t) dt + \\ + \int_{\rho_1}^{\infty} S_6(x, t) \theta_1(t) dt = 0 \quad (x > \rho_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \theta_1(x) + \int_{\rho_0}^1 \frac{S_7(x, t)}{\sqrt{t - \rho_0}} \varphi_1(t) dt + \int_{\rho_1}^{\infty} S_8(x, t) \psi_1(t) dt + \\ + \int_{\rho_1}^{\infty} S_9(x, t) \theta_1(t) dt = 0 \quad (x > \rho_1) \end{aligned}$$

Здесь ядро $S_1(x, t) = K_1(x, t)$ определяется по формуле (1.3) с учетом (1.4), (1.5) и $\Delta(\beta) = \Delta_{11}(\beta) = 1$, $S_2(x, t) = S_4(t, x)$, а ядра $S_l(x, t)$ ($l = 3, 4, \dots, 9$) выражаются формулами:

$$\begin{aligned}
S_3(x, t) &= -x \int_0^{\infty} \Delta_{10}(\beta) \sin(t\beta) l_1(x, \beta) d\beta, \\
S_4(x, t) &= \frac{t \sqrt{x^2 - \rho_0^2}}{(x^2 - t^2) \sqrt{t + \rho_0}} + t \int_0^{\infty} |\Delta_{11}(\beta) - 1| \sin(x\beta) l_1(t, \beta) d\beta, \\
S_5(x, t) &= \int_0^{\infty} |\Delta_{11}(\beta) - 1| \sin(x\beta) \sin(t\beta) d\beta, \\
S_6(x, t) &= -\int_0^{\infty} \Delta_{10}(\beta) \sin(x\beta) \sin(t\beta) d\beta, \\
S_7(x, t) &= -t \int_0^{\infty} \Delta_{01}(\beta) \sin(x\beta) l_1(t, \beta) d\beta, \\
S_8(x, t) &= -\int_0^{\infty} \Delta_{01}(\beta) \sin(x\beta) \sin(t\beta) d\beta, \\
S_9(x, t) &= \int_0^{\infty} |\Delta_{00}(\beta) - 1| \sin(x\beta) \sin(t\beta) d\beta,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

где $l_1(x, \beta)$ определена формулой (1.5) Давление под штампом $p(\rho)$ выражается через $\varphi_1(x)$ по формуле (1.10).

Во втором случае задача (2.1)–(2.6) сводится к системе линейных интегральных уравнений (2.12) для функций $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$, $\theta_2(x)$, в которой ядро $S_1(x, t) = K_2(x, t)$ определяется по формуле (1.7) с учетом (1.8), (1.9) и $\Delta(\beta) = \Delta_{11}(\beta) - 1$, $S_2(x, t) = S_4(t, x)$, а ядра $S_i(x, t)$ ($i = 3, 4, \dots, 9$) выражаются формулами (2.13) с заменой $l_1(x, \beta)$ на $l_2(x, \beta)$ (1.9), ρ_0 на 1. Давление под штампом $p(\rho)$ выражается через $\varphi_2(x)$ по формуле (1.11). Если при изгибе слой отходит от основания кругового или кольцевого штампа, то неизвестный параметр ρ_0 определяется из условия $\varphi_2(\lambda, \rho_0) = 0$.

Институт проблем механики Академии наук СССР

Վ. Ս. ՆԻԿԻՇԻՆ, Կ. Ս. ՇԱՊԻՐՈ

Առաձգականության տեսության միակողմանի կապերով կոնտակտային
խնդիրներ

Հոդվածում ցույց է տրվում առաձգական շերտավոր միջավայրի մեջ
կլոր և օղակաձև կոշտ դրոշմների ներմղման ժամանակ ձգող կոնտակտային
լարումների առաջացման հնարավորությունը՝ կոնտակտի մեջ գտնվող մար-
միչների միջև լրիվ կոնտակտի անկայության դեպքում:

նոր բաժաններ են տրվում շերտավոր միջավայրերի սեղմման, կոր և
աղակաձև կոշտ դրոշմներով համապետ շերտի ծովան խնդիրների համար
առաձգական միջավայրի իր հիմքից հետ մնալու հաշվառումով:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐՈՇԻՄՆԵՐՆԵՐ

- ¹ В. С. Никишин, Г. С. Шапиро, Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа, т. I, Тбилиси, Изд. «МЕЦНИЕРЕБА», 1973.
² В. С. Никишин, Осесимметричные контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. Издание ВЦ АН СССР, Сообщения по прикладной математике, вып. 3, 1976. ³ В. С. Никишин, Г. С. Шапиро, Успехи механики деформируемых сред. Изд. «Наука», 1975.