ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 4

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян, С. С. Шагинян

# О напряженном состоянии бесконечной пластины с круговым отверстием, расслабленной двумя радиальными разрезами

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 13/IV 1976)

Исследованию напряженного состояния бесконечной пластины с круговым отверстием, расслабленной двумя радиальными разрезами различных видов посвящены работы многих авторов [1-9]. В большинстве указанных работ решения этих задач сведены к решению сингулярных интегральных уравнений относительно некоторой вспомогательной функции, ядра которых имеют особенность типа Коши. Решение последних уравнений строится известными асимптотическими или, что часто встречается, численными методами.

В настоящей работе при помощи одного способа, отличного от упомянутых и представляющего, на наш взгляд, самостоятельный интерес, строится эффективное решение задачи о напряженном состоянии бесконечной пластины с круговым отверстием, когда имеются два разреза одинаковой длины, расположенных на одном и том же диаметре. Построенное решение позволяет со сколь угодно большой точностью определить поле напряжений и перемещений в пластине. Этим способом можно получить решение такой же задачи в случае нескольких разрезов.

1. Пусть в бесконечной пластине с круговым отверстием радиуса $R$ имеются два разреза, расположенные на продолжении диаметра отверстия и не выходящие на его контур. Пусть далее, такая пластина деформируется единичными противоположно направленными сосредоточенными силами $q$, приложенными в симметричных точках вещественной оси (рис. 1). При нулевом напряженном состоянии на бесконечности, требуется определить поле упругих смещений и напряжений в рассматриваемой области.

На основе решения последней задачи при помощи принципа наложения легко может быть получено решение этой же задачи, когда пластина на бесконечности равномерно растягивается нагрузкой произвольной интенсивности, или когда на некоторых отрезках вещественной оси она нагружена касательной нагрузкой произвольной интенсивности, или же когда на нее одновременно действуют обе эти нагрузки

Заметим, что поле упругих элементов разбираемой задачи можно представить в виде суммы двух полей. Первое из них соответствует пластине с круговым отверстием без разрезов подвергающейся действиям двух единичных противоположно направленных сосредоточенных сил $q$. Второе соответствует пластине с круговым отверстием, расслабленной двумя симметричными радиальными разрезами, под действием симметричных нормальных нагрузок, приложенных только на берегах разрезов. Определение первого напряженного состояния при помощи аппарата интегралов Коши [10] приведено в работе [11].

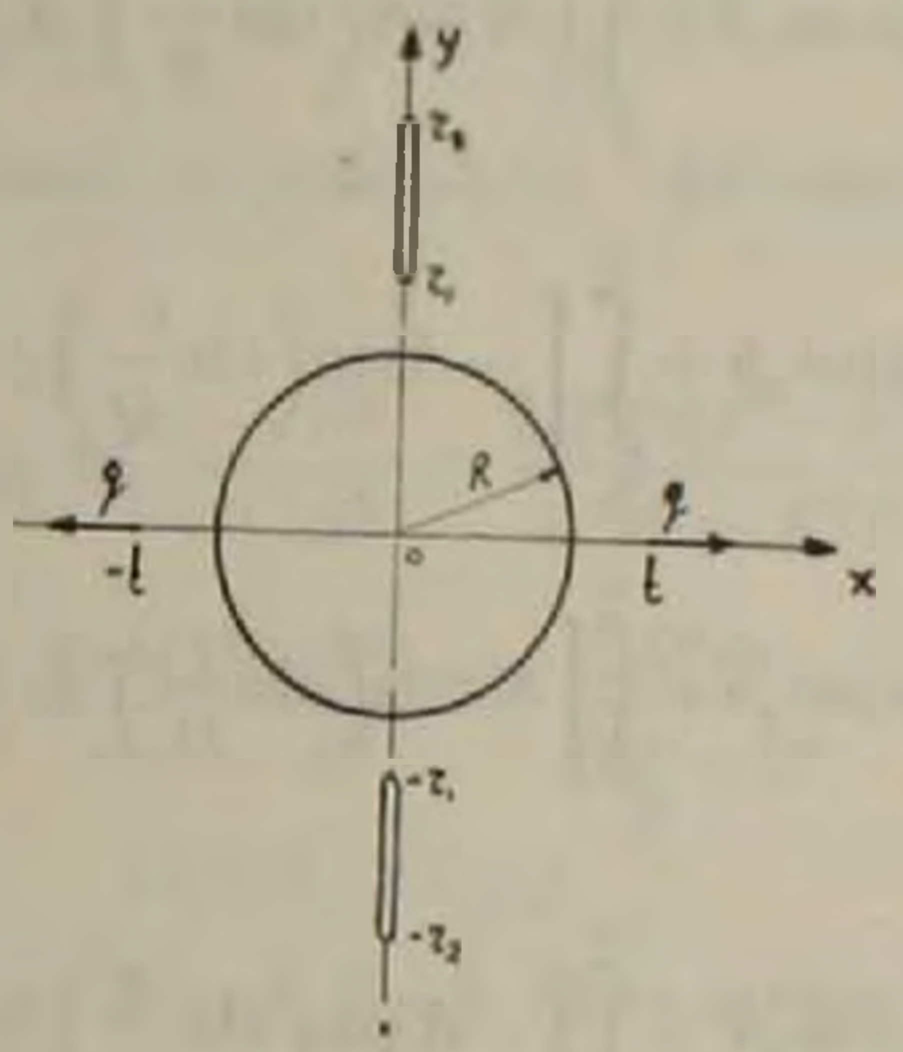


Рис. 1

Для определения второго напряженного состояния будем рассматривать, вследствие симметрии, только одну четверть исходной области, для которой граничные условия поставленной задачи запишутся в виде

$$v_\theta(r, 0) = \tau_{r\theta}(r, 0) = \tau_{r\theta}(r, \pi/2) = 0, \quad (R \leqslant r < \infty) \tag{1.1}$$

$$\sigma_r(R, \theta) = \tau_{r\theta}(R, \theta) = 0, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2) \tag{1.2}$$

$$v_\theta(r, \pi/2) = 0, \ r \,\overline{\in}\, (r_1, r_2), \ \sigma_\theta(r, \pi/2) = f_R(r, t), \ r \in (r_1, r_2) \tag{1.3}$$

Здесь непрерывная от двух переменных функция $f_R(r, t)$ представляет собой нормальное напряжение на месте разрезов первого напряженного состояния с обратным знаком. Она легко определяется и имеет известное выражение.

Условия же на бесконечности будут:

$$\sigma_r(r, \theta), \ \sigma_\theta(r, \theta), \ \tau_{r\theta}(r, \theta), \ v_\theta(r, \theta), \ v_r(r, \theta) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

2. Приведем известные формулы комплексного представления компонентов смещений и напряжений в плоской задаче теории упругости [10]

$$2\mu(v_r + i v_\theta) = e^{-i\theta}(\varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}), \tag{2.1}$$

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{2i\theta}(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)), \tag{2.2}$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]. \tag{2.3}$$

Представляя голоморфные в рассматриваемой области функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в виде $\varphi(z)=\varphi_1(r,\theta)+i\varphi_2(r,\theta)$, $\psi(z)=\psi_1(r,\theta)+i\psi_2(r,\theta)$, где $\varphi_j(r,\theta)$ и $\psi_j(r,\theta)$ $(j=1, 2)$ комплексно-сопряженные гармонические функции, из (2.1)—(2.3) можно получить выражения компонентов смещений и напряжений через функции $\varphi_j(r,\theta)$ и $\psi_j(r,\theta)$ $(j=1, 2)$.

Приступая теперь к выводу основного разрешающего функционального уравнения сформулированной выше задачи, неизвестные гармонические функции $\varphi_j(r,\theta)$ и $\psi_j(r,\theta)$ представляем в виде

$$\varphi_1(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_n}A_n\cos\lambda_n\theta+\int_0^{\infty}\left[A\cos\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)+B\sin\left(\lambda\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right)\right]\operatorname{ch}\lambda\theta\,d\lambda,$$

$$\varphi_2(r,\theta)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_n}A_n\sin\lambda_n\theta+\int_0^{\infty}\left[-A\sin\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)+B\cos\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)\right]\operatorname{sh}\lambda\theta\,d\lambda,$$

$$\psi_1(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_n}K_n\cos\lambda_n\theta+\int_0^{\infty}\left[K\cos\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)+L\sin\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)\right]\operatorname{ch}\lambda\theta\,d\lambda,$$

$$\psi_2(r,\theta)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{-\lambda_n}K_n\sin\lambda_n\theta+\int_0^{\infty}\left[-K\sin\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)+L\cos\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)\right]\operatorname{sh}\lambda\theta\,d\lambda.$$

Входящие сюда коэффициенты разложений $A_n$, $K_n$, $A$, $B$, $K$, $L$ и числа $\lambda_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ подлежат определению. Принимая

$$A=0,\ B=-L,\ K+\lambda L=0,\ \lambda_n=2n+1,\quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

можно убедиться в выполнении условий на бесконечности и граничных условий (1.1). С другой стороны, из граничных условий (1.2) получаются некоторые соотношения, выражающие коэффициенты $A_n$ и $K_n$ $(n=0, 1, \cdots)$ через коэффициент $L=L(\lambda)$. Таким образом, определив $L=L(\lambda)$ можно определить все коэффициенты разложений и тем самым, решить поставленную задачу.

Удовлетворяя граничным условиям (1.3), после некоторых операций, для определения коэффициента $L=L(\lambda)$ получим систему парных интегральных уравнений

$$\frac{1}{r}\int_0^{\infty}\lambda L\operatorname{ch}\frac{\lambda\pi}{2}\cos\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)d\lambda=0,\quad r\overline{\in}(r_1, r_2)$$

$$\int_0^{\infty}\lambda L\left[-\frac{1}{\lambda}\operatorname{sh}\frac{\lambda\pi}{2}\cos\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)+H_0^*(r,\lambda)\right]d\lambda=F_R'(r,t)+c,\ r\in(r_1, r_2)$$

где $H_0^*(r,\lambda)$ — известная функция, $2F_R'(r,t)=f_R(r,t)$, и $c$ — постоянная интегрирования, подлежащая определению.

Далее принимая

$$\frac{1}{r}\int\limits_0^{\infty} \lambda L \operatorname{ch}\frac{\lambda\pi}{2}\cos\left(\lambda\ln\frac{r}{R}\right)d\lambda = \begin{cases} 0, & r\overline{\in}(r_1, r_2) \\ \chi_l(r), & r\in(r_1, r_2) \end{cases}$$

после некоторых выкладок, относительно функции $\chi_l(r)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\left[\ln\frac{1}{|s-r|}+K_R(r, s)\right]\chi_l(s)ds=-\pi F_k(r, t)-\pi c, \quad (r_1<r<r_2), \tag{2.4}$$

где непрерывная от двух переменных функция $K_R(r, s)$ выражается формулой

$$K_R(r, s)=\ln(r+s)+\ln\frac{rs-R^2}{rs+R^2}+\frac{2R^4rs(r^2-R^2)}{(r^2s^2-R^4)^2}+\frac{2R^4(s^2-R^2)rs}{(r^2s^2-R^4)^2}-$$

$$-\frac{2rs(r^2-R^2)}{r^2s^2-R^4}-\frac{2rs(s^2-R^2)}{r^2s^2-R^4}-\frac{2R^2rs}{r^2s^2-R^4}+\frac{2r}{s}+\frac{2s}{r}-\frac{2R^2}{rs},$$

$$(r_1\leq r, \ s\leq r_2)$$

В частном случае, когда $R\to 0$ получается интегральное уравнение задачи для бесконечной пластины, расслабленной двумя симметричными разрезами. А если в последнем положить $r_1=0$, то получим интегральное уравнение задачи, родственной задаче Гриффитса ([9]).

3. Определяющее интегральное уравнение (2.4) решается при помощи аппарата ортогональных многочленов Чебышева первого рода. Подставляя искомое решение в виде

$$\chi_l(s)=\left[1-\left(\frac{2s-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right)^2\right]^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}x_m T_m\left(\frac{2s-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right),$$

$$(r_1<s<r_2) \tag{3.1}$$

где $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, обычным способом относительно них получаем следующую бесконечную систему линейных уравнений

$$x_n+\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}x_m=e_n(t), \quad (n=1, 2, \ldots)$$

Здесь введены обозначения:

$$a_{mn}=\frac{8n}{\pi^2(r_2-r_1)^2}\int\limits_{r_1}^{r_2}\left[1-\left(\frac{2r-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right)^2\right]^{-1/2}T_n\left(\frac{2r-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right)dr\int\limits_{r_1}^{r_2}K_R(r,s)\times$$

$$\times\left|1-\left(\frac{2s-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right)^2\right|^{-1/2} T_m\left(\frac{2s-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right)ds, \quad m, n=1, 2\ \ldots,$$

$$e_n(t)=-\frac{2}{\pi(r_2-r_1)}\int_{r_1}^{r_2} f_R(r, t)\sqrt{1-\left(\frac{2r-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\,U_{n-1}\left(\frac{2r-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right)dr,$$

$$n=1,\ 2, \cdots$$

а функции $U_{n-1}(x)$ $(n=1,\ 2, \cdots)$ многочлены Чебышева второго рода.

Коэффициент $x_0=0$, что вытекает из условия

$$\int_{r_1}^{r_2}\chi_I(r)dr=0,$$

которое в свою очередь вытекает из условия непрерывного продолжения смещения $v_0\,(r,\ \pi/2)$ на концевые точки разреза $r_1<r<r_2$.

Детальное исследование полученной бесконечной системы можно провести известным способом ([11,12]).

Таким образом, определив функцию $\chi_I(r)$, постоянную $c$ можно определить из исходного интегрального уравнения (2.4) подставив в него выражение этой функции.

4. Для определения коэффициентов интенсивностей разрывающего напряжения, заметим, что для него имеет место представление

$$\sigma_0\,(r,\ \pi/2)=\frac{2}{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\left[\frac{1}{r-s}+H_1^*(r,\ s)\right]\chi_I(s)ds, \quad r\in[(R,\ r_1),\ (r_2,\ \infty)]$$

где $H_1^*(r,\ s)$—известная непрерывная вместе со своими частными производными любого порядка функция.

Подставляя (3.1) в (4.1), после некоторых вычислений, для коэффициентов интенсивностей будем иметь

$$N(r_1)=\lim_{r\to r_1-0}\sigma_0\,(r,\ \pi/2)\sqrt{r_1-r}=-\sqrt{r_2-r_1}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m x_m,$$

$$N(r_2)=\lim_{r\to r_2+0}\sigma_0\,(r,\ \pi/2)\sqrt{r-r_2}=\sqrt{r_2-r_1}\sum_{m=1}^{\infty}x_m.$$

Институт механики Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Ս. Ս. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

## Կլոր անցքով անվերջ հարթության լարվածային վիճակի մասին, երբ վերջինս թուլացված է երկու շառավղային ճեղքերով

*Աշխատանքում դիտարկվում է կլոր անցքով հարթության համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը, երբ հարթությունը թուլացված է*

*կոր եզր դուրս չեկող սիմետրիկ դասավորված շառավղային ճեղքերով։*

*Ենթադրվում է, որ հարթությունը ցեմենտացիայի է ենթարկված հակադիր ուղղություն ունեցող երկու կենտրոնացված ուժերով։*

*Պահանջվում է գտնել լարումների և տեղափոխությունների դաշտը այդ տիրույթում։*

*Խնդրի լուծումը հիմնված է Կոլոսով-Մուսխելիշվիլու կոմպլեքս պոտենցիալների հատկությունների օգտագործման վրա և հանգում է Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։*

*Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների միջոցով նշված ինտեգրալ հավասարման լուծումը բերված է համարժեք հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը։*

*Ստացված են բանաձևեր, որոնք հնարավորություն են տալիս որոշելու քայքայող լարումների ինտենսիվության գործակիցները ճեղքերի ծայրակետերում։*

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ


[1] *F. Erdogan, G. Gupta, M. Ratwani*, Journ. of Applied Mech, Trans. ASME, v. 41. № 4 (1974). [2] *C. Atkinson*, Int. Journ. Engng. Sci , v. 10 (1972). [3] *L. Wigglesworth*, Mathematika, v. 5, №9 (1958). [4] *O. Bowi* Journ Math. and Phys., v. 35 (1956) [5] *H. Bueckner*, In. „Boundary Problems in Differential equations". Univ. Wisconsin Press, 1960. [6] *H. Bueckner, J. Giaever*, ZAMM, Bd. 46. № 5 (1966) [7] *В. Х. Сирунян*, «Известия АН Арм ССР», Механика, т. 24, № 4 (1971). [8] *Г. Жоржолиани, А. Каландия*, ПММ, т. 38 (1974). [9] *В. В. Панасюк*, Предельное равновесие хрупких тел с трещинами, Изд. «Наукова думка», Киев, 1968. [10] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966. [11] *С. С. Шагинян*, ДАН Арм ССР, т. 59, № 3 (1974). [12] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян*, ПММ, т. 36, № 5 (1972).