ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 4

УДК 518.5 : 519.5

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Азатян

Об одном алгоритме для перечисления 1-переменных циклических 2^n- последовательностей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Ф. Т. Саркисяном 25/VI 1976)

Для обоснования алгоритма нам потребуется ряд определений и доказательств.

Определение 1. Над массивом i, q, j, k-каркаса ([1-3]) определим целочисленную функцию $\gamma(i, j)$, $0 \leqslant \gamma(i, j) \leqslant 1$, и для каждого фиксированного j ($j=1, 2, \ldots, t_n$; $t_n=f(n)$; $f(n)$ - целочисленная, $f(n)>0$) будем задавать соответствующий ему n-кортеж ([1]), состоящий из значений функций $\gamma(i, j)$ при монотонно растущих значениях $i (i=1, 2, \ldots, n)$. Определим также функцию $\delta(i, k)$ следующим образом: $\forall n \forall i \forall j \forall k((k=j) \& (\delta(i, k)=\gamma(i, j+1)-\gamma(i, j) \& (\delta(i, t_n)= =\gamma(i, 1)-\gamma(i, t_n)))$.

Определение 2. „m-переменной t_n-последовательностью“ назовем последовательность, составленную из t_n n-кортежей таким образом, что каждый $(j+1)$-ый n-кортеж $\gamma(1, j+1)\, \gamma(2, j+1) \cdots \gamma(n, j+1)$ отличается от j-ого n-кортежа $\gamma(1, j) \gamma(2, j) \ldots \gamma(n, j)$ только $m (m \leqslant n)$ элементами, расположенными в m различных позициях так, что если $|m|$ и $|\overline{m}|$—множества и $|n|$—множество всех индексов i, то

$$
\begin{gathered}
\forall n \forall i \forall j \forall r \forall m((|m| \rightarrow(||m||=m)) \&(|\overline{m}| \rightarrow \\
\rightarrow(||\overline{m}||=n-m)) \&((|m| \cup|\overline{m}|)=|n|) \& \\
\&((|m| \cap|\overline{m}|)=\varnothing) \&(((r \in|m|) \rightarrow(\gamma(i_r, j+1) \neq \\
\neq \gamma(i_r, j))) \vee((r \in|\overline{m}|) \rightarrow(\gamma(i_r, j+1)=\gamma(i_r, j)))).
\end{gathered} \tag{1}
$$

Всякие два n-кортежа, удовлетворяющие (1), назовем „взаимно-m-переменными“, а отношение взаимной m-переменности обозначим через „$\sim m \sim$“. Всякую m-переменную t_n-последовательность назовем „циклической“, если при соблюдении (1) на нее наложено дополнительное ограничение:

$$\forall n \forall i \forall j \forall r \forall m(((r \in |m|) \to (\gamma(i_r, 1) \neq$$
$$\neq \gamma(i_r, t_n))) \vee ((r \in |\bar{m}|) \to (\gamma(i_r, 1) = \gamma(i_r, t_n)))). \quad (2)$$

Очевидно, в m-переменной t_n-последовательности расстояние Хэмминга [4] между каждыми смежными j-ым и $(j+1)$-ым n-кортежами постоянно, равно m и определяется из равенства:

$$m = \sum_{i=1}^{i=n} |\delta(i, k)|,$$

где k-фиксировано.

Используя алгоритмы $AP_n^{'}$ и AC_n^m [3], можно построить 2-переменные 2^{n-1}-последовательности.

В известном в литературе [4] методе максимального правдоподобия предполагается, что наилучшим решением на приемнике будет декодирование в то кодовое слово, которое отличается от полученного в наименьшем числе мест. Этим объясняется широкое распространение 1-переменных циклических 2^n-последовательностей (далее их будем обозначать также через о. ц. п.). Рассмотрим их несколько подробнее. Заметим, что из натурального 2-ичного кода, состоящего из 2^n n-кортежей, можно построить 1-переменную циклическую 2^n-последовательность по следующему простому алгоритму.

Алгоритм A2^n. 1. В качестве каждого i-ого $(i=1, 2, \ldots, n)$ столбца о. ц. п. взять соответствующий i-ый столбец натурального 2-ичного кода, произведя с элементами этого столбца следующие преобразования:

$$\begin{aligned} &\forall n \forall i \forall j \forall s \forall r((s \in (1, 3, \ldots, 2^{i-1}-1)) \,\& \\ &\& (r \in (1, 2, \ldots, 2^{n-i+1})) \,\& (((p_1 = 2^{n-i+1} s) \,\& \\ &\& (j \in (p_1+1, p_1+2, \ldots, (s+1) \cdot 2^{n-i+1}))) \to \\ &\to (\gamma(i, p_1+r) \times \gamma(i, (s+1) \cdot 2^{n-i+1} - r+1))) \,\& \\ &\& (((p_2 = 2^{n-i+1}(s-1)) \,\& \, (j \in (p_2+1, p_2+ \\ &+2, \ldots, 2^{n-i+1} s))) \to (\gamma(i, p_2+r) \times \gamma(i, p_2+r)))), \end{aligned} \quad (3)$$

где „$\times$“ — транспозиция.

Определение 3. Назовем о. ц. п., сконструированную по алгоритму $A2^n$, „α_n-последовательностью“. Множество $|C_n|$ $(||C_n||=2^n)$ всех элементов α_n-последовательности разобъем на подмножества $|C_n^y|$ в соответствии с числом y единиц (y—вес Хэмминга [4]), содержащихся в каждом из n-кортежей. Для того, чтобы различать два „$n(y)$-кортежа“ при одинаковых весах y и при различных порядках расположения элементов, введем индексы p и l и будем обозначать эти $n(y)$-кортежи через b_{y_p} и b_{y_l}.

Определение 4. С учетом (1) и (2) и определений 2,3 построим некоторый неориентированный $(2^n, \ n \cdot 2^{n-1})$-граф ([5]), сопоставляя каждому из $n(y)$-кортежей b_y по одной вершине vert b_y так, чтобы с использованием символа „next" для обозначения отношения соседства между всякими двумя подмножествами $|_vC_n^{y'}|$ и $|_vC_n^{y''}|$ вершин, соответствующими подмножествам $|C_n^{y'}|$ и $|C_n^{y''}|$, можно было записать условие построения:

$$\forall n \forall y \forall p \forall l (((|y' - y''| = 1) \to (|_vC_n^{y'}| \mathrm{next} |_vC_n^{y''}|)) \,\&$$

$$\& ((|y' - y''| \neq 1) \to \neg (|_vC_n^{y'}| \mathrm{next} |_vC_n^{y''}|)) \,\&$$

$$\& ((b_{y_p} \sim 1 \sim b_{y_l}) \to (\mathrm{vert}\, b_{y_p} \mathrm{adj}\ \mathrm{vert}\ b_{y_l})) \,\&$$

$$\& (\neg (b_{y_p} \sim 1 \sim b_{y_l}) \to \neg (\mathrm{vert}\, b_{y_p}\ \mathrm{adj}\ \mathrm{vert}\, b_{y_l}))) \qquad (4)$$

Всякий граф, построенный в соответствии с (4), назовем „графом ^1C_n". Если в графе ^1C_n существует некоторое множество гамильтоновых циклов ([5]), то этому множеству, очевидно, соответствует множество различных о. ц. п. Допуская, что такое множество существует (см. леммы 1 и 2), обозначим через $^1\Gamma_{nau}$ каждый u-ый гамильтонов цикл, соответствующий либо α_n-последовательности, либо одной из последовательностей, конструируемых из α_n-последовательности путем последовательных односмежных транспозиций ([1-3]) столбцов, а множество всех различных таких циклов обозначим через $|^1\Gamma_{na}|$ (циклу, соответствующему α_n-последовательности присвоим номер $u = 1$).

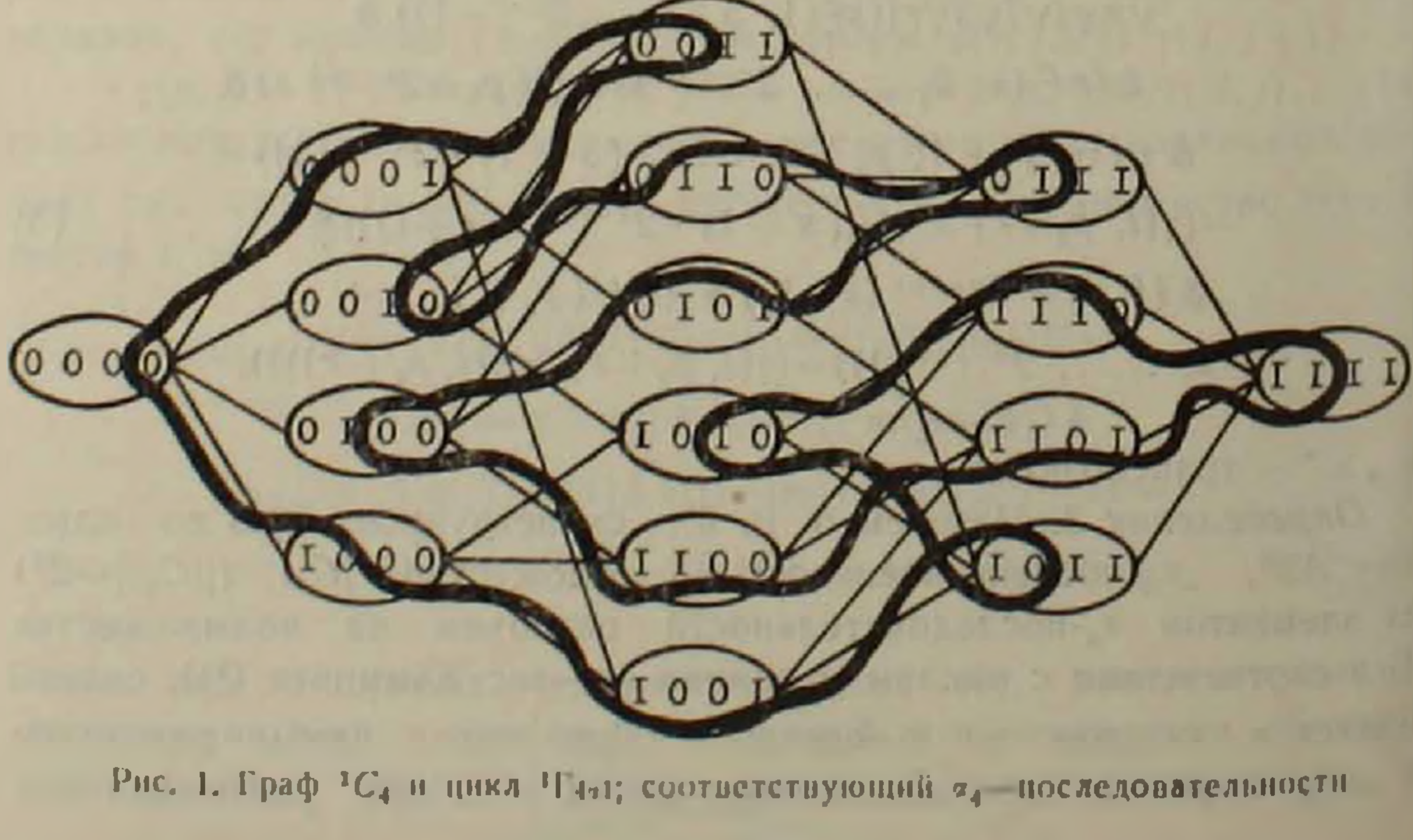

Рис. 1. Граф $^1C_4$ и цикл $^1\Gamma_{4a1}$; соответствующий α_4 — последовательности

Пример 1. На рис. 1 приведен пример построения графа ${}^1C_4$ и гамильтонова цикла ${}^1\Gamma_{4a1}$, соответствующего α_4-последовательности.

Лемма 1. *Всякий граф ${}^1C_n$ гамильтонов.*

Доказательство 1. Покажем, что если существует некоторая α_{n-1}-последовательность, то из нее можно построить α_n-последовательность. Допустим, что над i, q, j, k-каркасом построена некоторая α_{n-1}-последовательность, состоящая из значений функции $\gamma(i, j)$ при $i \in (2, 3, \ldots, n)$ и $j \in (1, 2, \ldots, 2^{n-1})$. Из этой последовательности построим новую последовательность $(n-1)$-кортежей в соответствии с условиями:

$$\forall n \forall i \forall j (((j \in (1, 2, \ldots, 2^{n-1})) \rightarrow (\gamma'(i, j) = \gamma(i, j))) \&$$
$$\& ((j \in (2^{n-1}+1, 2^{n-1}+2, \ldots, 2^n)) \rightarrow (\gamma'(i, 2^{n-1}+k) =$$
$$= (\gamma(i, 2^{n-1} - k + 1)))), \qquad (5)$$

где штрихами обозначены функции во вновь построенной последовательности. Назовем эту последовательность „2^{n-1}-подструктурой" „2^n-структуры", эквивалентной 2^n-последовательности, построенной из 2^{n-1}-подструктуры путем сочленения с каждым $(n-1)$-кортежем соответствующего его j-ому аргументу значения функции $\gamma'(1, j)$, удовлетворяющего условию:

$$\gamma'(1, j) = \begin{cases} 0, \text{ если } & j \in (1, 2, \ldots, 2^{n-1}); \\ 1, \text{ если } & j \in (2^{n-1}+1, 2^{n-1}+2, \ldots, 2^n). \end{cases} \qquad (6)$$

Сравнивая (5) и (6) с (1) и (3), замечаем, что эти условия непротиворечивы, а одноперменность и цикличность построенной 2^n-последовательности сохраняется; так что эта последовательность суть α_n-последовательность.

2. Очевидно, последовательность (0, 1) суть циклическая 1-переменная 2^1-последовательность, соответствующая циклу ${}^1\Gamma_{1a1}$ в графе ${}^1C_1$. Из 1 и 2 непосредственно следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Каждому элементу из множества $|P_n||1, 2|$ циклической группы порядка $n!$ перестановок столбцов всякой α_n-последовательности взаимно однозначно соответствует один из элементов множества $|{}^1\Gamma_{na}|$.*

Доказательство 1. Из (1) и (2) следует, что любая однократная транспозиция (¹) столбцов всякой о. ц. п. не изменяет взаимной 1-переменности между каждыми j-м и $(j+1)$-м n-кортежами в построенной путем однократной транспозиции новой последовательности; поэтому после каждой односмежной транспозиции столбцов получается о. ц. п., соответствующая одному из циклов ${}^1\Gamma_{nau}$.

2. Для того, чтобы две о. ц. п. соответствовали одному и тому же циклу ${}^1\Gamma_{nau}$, необходимо и достаточно, чтобы при однократной транспозиции некоторой пары i'-ого и i''-ого столбцов сохранялось одно из взаимоисключающих условий: 1) порядок расположения

n-кортежей не изменяется; 2) порядок расположения n-кортежей изменяется на обратный либо циклически сдвигается. Пусть выполняется 1), тогда должно выполняться условие: $\forall i \forall j (\gamma(i', j) = \gamma(i'', j))$, что эквивалентно наличию двух столбцов с одинаковыми по составу и порядку расположения элементами, но это противоречит условию $\|\{{}^1C_n\}\| = 2^n$, данному в определении 3. Пусть выполняется 2), тогда после всякой однократной транспозиции столбцов веса Хэмминга всех n-кортежей должны измениться; но очевидно, что при любой транспозиции столбцов веса Хэмминга n-кортежей не изменяются.

3. В [1,2] показано, что существует последовательность $n!$ односмежных транспозиций, образующая циклическую группу порядка $n!$ и с помощью этой последовательности перечисляются элементы всех возможных $n!$ перестановок из $\{P_n\}$.

Из 1.—3. непосредственно следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Во всяком графе ${}^1C_n$ каждому циклу ${}^1\Gamma_{nau}$ взаимно-однозначно соответствует не менее $2(n-2)$ гамильтоновых путей ${}^1_p\Gamma_{nau}$.*

Доказательство. 1. По построению в соответствии с (5) и (6) во всяких 2^{n-s+1}-структурах ($s=1, 2, \ldots, n$) $(n-s+1)(1)$-кортежи занимают позиции $j=2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-s+1}$.

2. Ввиду 1-переменности последовательностей, соответствующих циклам ${}^1\Gamma_{nau}$, за всеми $n(1)$-кортежами следуют $n(2)$-кортежи, за исключением $n(1)$-кортежа, занимающего позицию $j=2^n$.

3. Так как в соответствии с (6) при всех $j>2^{n-1}$ находятся все те n-кортежи, которые имеют единицу в одном и том же столбце $i=1$, то все $n(2)$-кортежи при $j>2^{n-1}$ взаимно-1-переменны с $n(1)$-кортежем, занимающим позицию $j=2^n$.

4. Из (5) следует симметрия каждой пары 2^{n-s}-подструктур, образующих 2^{n-s+1}-структуру, относительно горизонтальной оси, проходящей на i, q, j, k-каркасе через $k=2^{n-s}$; поэтому с учетом 1. каждой i-ой позиции, в которой находится единица в n-кортежах, занимающих позиции $j=2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-s}$, соответствует та же i-ая позиция в n-кортежах, соответственно занимающих позиции $j=$ $=2^{n-s}+2^{n-s-1}+\ldots+2^1+1,\ 2^{n-s}+2^{n-s-1}+\ldots+2^2+1, \ldots, 2^{n-s}+1$.

Из 3. также следует, что во всех позициях $j=2^{n-s}+1,\ 2^{n-s}+$ $+2^{n-s-1}+1, \ldots, 2^{n-s}+2^{n-s-1}+\ldots+2^1+1$ существует единица, занимающая позицию $i=1$, поэтому с учетом 2. каждый $n(2)$-кортеж, занимающий позиции: $2^{n-s}+1,\ 2^{n-s}+2^{n-s-1}+1, \ldots, 2^{n-s}+$ $+2^{n-s-1}+\ldots+2^1+1$, суть n-кортеж, взаимно 1-переменный с $n(1)$—кортежем, находящимися в позиции $j=2^n$. Откуда следует, что в каждой 2^n-структуре существует ровно n-1 $n(2)$-кортежей, взаимно 1-переменных с $n(1)$-кортежем, занимающим позицию $j=2^n$.

5. Из 4. следует, что существует n-1 возможностей перехода от указанных $n(2)$-кортежей к $n(1)$-кортежу, занимающему позицию $j=2^n$; поэтому можно построить не менее $n-2$ путей ${}^1_p\Gamma_{nau}$ в

графе ${}^1C_n$, соответствующих последовательностям n-кортежей, занимающих позиции: $j=1, 2, \ldots, 2^{n-1}+1, 2^n, 2^n-1, \ldots, 2^{n-1}+2$; $j=1, 2, \ldots, 2^{n-1}+2^{n-2}+1, 2^n, 2^n-1, \ldots, 2^{n-1}+2^{n-2}+2; \ldots; j=1, 2, \ldots, 2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^2+1, 2^n, 2^n-1, \ldots, 2^{n-1}+2^{n-1}+\ldots+2^2+2$; так что удовлетворяется условие:

$$\forall n \forall j \forall s \left((s \in (1, 2, \ldots, n-2)) \;\&\; \left(j_s = 1 + \sum_{r=1}^{r=s} 2^{n-r} \right) \right), \qquad (7)$$

где j_s — аргумент, предшествующий $j_{s+1}=2^n$.

С учетом возможности изменения направления обхода гамильтоновых путей на обратный из 5. приходим к утверждению леммы.

Теорема. *Для всякого $n \geq 3$ циклу ${}^1\Gamma_{n\alpha}$ в графе ${}^1C_n$ можно сопоставить не менее $\|\Gamma_{(n+1)\alpha}\|$ циклов в графе ${}^1C_{n+1}$, где*

$$\|\Gamma_{(n+1)\alpha}\| = (n+1)!\,[n-1+C^1_{(n-1)!}+C^2_{3!(n-2)!}]. \qquad (8)$$

Доказательство. 1. Так как при всевозможных перестановках столбцов α_n — последовательности единица в 2^n-ых n-кортежах занимает все n различных позиций одинаковое число раз, то в соответствии с леммой 2 в множестве $\{{}^1\Gamma_{n\alpha}\}$ существует n подмножеств $\{{}^1_x\Gamma_{n\alpha}\}$ $(x=1, 2, \ldots, n)$ по $(n-1)!$ циклов ${}^1\Gamma_{n\alpha u}$, каждому из которых соответствует 2^n-последовательность, 2^n-ый n-кортеж которого идентичен со всеми остальными 2^n-ыми $n(1)$-кортежами из других циклов из $\{{}^1_x\Gamma_{n\alpha}\}$. Из некоторой пары последовательностей, соответствующих двум различным циклам из $\{{}^1_x\Gamma_{n\alpha}\}$ и состоящих соответственно из значений функций $\gamma'(i, j)$ и $\gamma''(i, j)$ $(i=2, 3, \ldots, n+1)$, построим некоторую 1-переменную циклическую 2^{n+1}-последовательность, исходя из условий:

$$\forall n \forall i \forall j \,((i=2, 3, \ldots, n+1) \,\&\, ((j \in (1, 2, \ldots, 2^n)) \to$$
$$\to ((\gamma'(i, j)=\gamma(i, j) \,\&\, (\gamma(1, j)=0))) \,\&\, ((j \in (2^n+1, 2^n+2, \ldots$$
$$\ldots, 2^{n+1})) \to ((\gamma''(i, j)=\gamma(i, j)) \,\&\, (\gamma(1, j)=1)))). \qquad (9)$$

Учитывая 1 леммы 1 и лемму 2 заметим, что число различных гамильтоновых циклов $\|{}^1_c\Gamma_{(n+1)\alpha}\|$, построенных в соответствии с условием (9) определяется из равенства

$$\|{}^1_c\Gamma_{(n+1)\alpha}\| = (n+1)!\,[1+C^2_{(n-1)!}]. \qquad (10)$$

2. Учитывая лемму 3, из каждой пары последовательностей, соответствующих одному из путей ${}^1_p\Gamma_{n\alpha u}$ и состоящих соответственно из функций $\gamma'''(i, j)$ и $\gamma^{IV}(i, j)$ $(i=2, 3, \ldots, n+1)$, построим неко-

торую 1-переменную циклическую 2^{n+1}-последовательность в соответствии с условием, получаемым из условия (9) путем подстановок $\gamma'''(i, j)$ вместо $\gamma'(i, j)$ и $\gamma^{IV}(i, j)$ вместо $\gamma''(i, j)$.

Учитывая 1 леммы 1, лемму 2 и лемму 3, заметим, что число $\|\{{}_p^1\Gamma_{(n+1)\alpha}\}\|$ гамильтоновых циклов, построенных в соответствии с вышеприведенным условием определяется из равенства

$$\|\{{}_p^1\Gamma_{(n+1)\alpha}\}\| = (n+1)!\,[\,n-2+C^2_{3n!(n-2)!}\,]. \qquad (11)$$

3. С учетом (10), (11) и леммы 2 получаем (8).

Теорема доказана.

Из хода доказательства лемм 1—3 и теоремы непосредственно следуют алгоритмы для построения всех циклов $\{\Gamma_{(n+1)\alpha}\}$ и всех различных 1-переменных циклических 2^{n+1}—последовательностей, число которых вдвое больше $\|\{\Gamma_{(n+1)\alpha}\}\|$ (8).

Пусть с использованием алгоритма $A2^n$ построена α_n-последовательность. Тогда для генерирования 1-переменных циклических 2^{n+1}-последовательностей можно сконструировать следующий.

Алгоритм A^1C_n. 1. В соответствии с леммой 2 путем последовательных односмежных транспозиций столбцов построить из α_n-последовательности $n!$ 1-переменных циклических 2^n-последовательностей.

2. Используя результат 1, в соответствии с 1 теоремы построить все возможные $2(n+1)![1+C^2_{(n-1)!}]$ 1-переменные циклические 2^{n+1}-последовательности, соответствующие циклам из $\{{}_c^1\Gamma_{(n+1)\alpha}\}$.

3. Используя результат 1., каждой из $n!$ 1-переменных циклических 2^n-последовательностей сопоставить в соответствии с леммой 3 по $(n-2)$ последовательности, соответствующие гамильтоновым путям ${}_p^1\Gamma_{(n+1)\alpha}$.

4. В соответствии с 2 теоремы, используя результат 3, построить все возможные $2(n+1)![n-2+C^2_{3!(n-2)!}]$ 1-переменные циклические 2^{n+1}-последовательности, соответствующие циклам из $\{{}_p^1\Gamma_{(n+1)\alpha}\}$.

Ввиду быстрого роста значений функции $\varphi(n)=\|\{\Gamma_{(n+1)\alpha}\}\|$ с возрастанием n ($\|\{\Gamma_{2\alpha}\}\|=2$, $\|\{\Gamma_{3\alpha}\}\|=6$, $\|\{\Gamma_{4\alpha}\}\|=432$, $\|\{\Gamma_{5\alpha}\}\|=10080$, $\|\{\Gamma_{6\alpha}\}\|=655200$) полный перебор элементов $\{\Gamma_{(n+1)\alpha}\}$ уже при $n=6$ в настоящее время практически нецелесообразен; поэтому при $n>6$ алгоритм можно использовать вплоть до произвольного останова.

Учитывая (7), а также треугольник адресов A^n_{sq} [1,2] можно организовать матричное управление процессом перечисления.

Ереванский НИИ математических машин

Ա. Հ. ԱԶԱՏՅԱՆ

1-փոփոխական ցիկլիկ 2^n-հաջորդականությունների թվարկման ալգորիթմի մասին

Տրվում են 1-փոփոխական ցիկլիկ 2^n-հաջորդականությունների թվարկման մեթոդի հիմնավորումը և համապատասխան ալգորիթմը։

Ապացուցվում է, որ ալգորիթմի կիրառումը հնարավորություն կտա թվարկել ամեն մի n-ի համար $2\|{}^1\Gamma_{(n+1)\alpha}\|$ տարբեր 1-փոփոխական ցիկլիկ 2^n-հաջորդականություններ, որտեղ

$$\|{}^1\Gamma_{(n+1)\alpha}\| = (n+1)!\,[n-1 + C^2_{(n-1)!} + C^2_{3!(n-2)!}].$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Азатян,* К вопросу о перечислении элементов полного множества ассоциаций $\{U\}$. Депонированная рукопись, 1974, РИР, № 3, 3—697, 1975. [2] *А. А. Азатян, Р. А. Тамразян,* ДАН Арм. ССР, LXI, № 5 (1975). [3] *А. А. Азатян,* ДАН Арм. ССР, LXII, № 1, 1976, стр. 23—28. [4] *У. Питерсон,* Коды, исправляющие ошибки, пер. с англ., «Мир», М., 1964. [5] *Ф. Харари,* Теория графов, пер. с англ., «Мир», М., 1973.