ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 4

УДК 519.45 : 539.3

МАТЕМАТИКА

М. Л. Бурышкин

Разложения вектор-функций, определенных на области с конечной группой симметрии, в усеченном случае

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 30/V 1976)

В работе ([1]) в общем виде построено разложение функции p, определенной на области Ω^* с конечной группой H^* симметрии. Однако, если эта функция обладает некоторыми свойствами симметрии по отношению к операциям группы H^*, то практическое применение указанного разложения по функциям, преобразующимся по неприводимым представлениям τ_μ^* группы H^*, в ряде прикладных задач механики ([1,2]) оказывается излишне громоздким, а иногда даже нецелесообразным.

В данной статье исследуются разложения вектор-функций p_{φ} ($\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu$), преобразующихся по m_ν-мерному неприводимому представлению τ_ν подгруппы $H \subset H^*$ и определенных на области Ω^*. Этот важный для механических приложений случай по предложению члена-корреспондента АН УССР М. Г. Крейна в дальнейшем называется усеченным.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю признательность М. Г. Крейну за внимание к его работе.

1. Вводятся следующие обозначения: m^* и m — порядки групп H^* и H; $\varkappa$ — индекс подгруппы H; $h^* \in H^*$ и $h \in H$ — элементы соответствующих групп; m_μ^* — размерность представления τ_μ^*; $h^{(t)*} \in H^*$ ($t=1, 2, \ldots, \varkappa$)—элементы, порождающие левые смежные классы $h^{(t)*}H$ при некотором разбиении группы H^* на эти классы; $h^*H(h^*)^{-1} \subset H^*$ — подобная H подгруппа, порожденная элементом h^*, $\tau_{\nu\rho\varphi}(h)$ ($\rho, \varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu$) и $\tau^*_{\mu\rho\varphi}(h^*)$ ($\rho, \varphi = 1, 2, \ldots, m_\mu^*$) — элементы матриц, отвечающих операторам $\tau_\nu(h)$ и $\tau_\mu^*(h^*)$ представлений τ_ν и τ_μ^*; $h^{(1)*}$ — единичный элемент; χ_ν и χ_μ^* — характеры неприводимых представлений τ_ν и τ_μ^*.

Под h^*p понимается заданная на Ω^* вектор-функция, значение которой в точке $x \in \Omega^*$

$$h^*p(x) = h^*[p(h^{*-1}x)] \qquad \forall x \in \Omega^*. \tag{1.1}$$

ՀԱՅԿ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ԳՐԱԴԱՐԱՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

Говорят, что вектор-функции $p_{\nu\varphi}$ $(\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu)$ преобразуются по представлению τ_ν группы H, если

$$hp_{\nu\varphi} = \sum_{\rho=1}^{m_\nu} \tau_{\nu\rho\varphi}(h) p_{\nu\rho} \quad \forall h \in H \ (\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu). \tag{1.2}$$

Предполагается линейная независимость функций $h^{(t)*}p_{\nu\varphi}$ $(t = 1, 2, \ldots, \varkappa;\ \varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu)$, которые, следовательно, порождают $m_\nu \cdot \varkappa$ — мерное пространство L. Подпространство $L^{(t)} \subset L$ $(t = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ натянуто на m_ν вектор-функций $h^{(t)*}p_{\nu\varphi}$ $(\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu)$. Очевидно, что

$$L = \sum_{t=1}^{\varkappa} L^{(t)}. \tag{1.3}$$

Основываясь на известных свойствах (1.3) разложения группы H^* на смежные классы по подгруппе H, можно показать справедливость следующих двух лемм:

Лемма 1. *Пространство L инвариантно относительно всех элементов группы H^*, причем для каждого элемента $h^* \in H^*$ и каждого значения $t = 1, 2, \ldots, \varkappa$ найдется такое целое положительное число $\theta \leqslant \varkappa$, что*

$$h^* h^{(t)*} p_{\nu\varphi} \in L^{(\theta)} \qquad (\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu). \tag{1.4}$$

Лемма 2. *Если элемент $h^* \in h^{(t)*} H (h^{(t)*})^{-1}$, а вектор-функция $p \in L^{(t)}$, то $h^* p \in L^{(t)}$.*

Кроме того, из соотношения

$$h^{(t)*} h (h^{(t)*})^{-1} h^{(t)*} p_{\nu\varphi} = \sum_{\rho=1}^{m_\nu} \tau_{\nu\rho\varphi}(h) h^{(t)*} p_{\nu\rho} \tag{1.5}$$

$$\forall h \in H \quad (\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu; \quad t = 1, 2, \ldots, \varkappa)$$

вытекает

Лемма 3. *Подпространство $L^{(t)} \subset L$ $(t = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ инвариантно относительно подгруппы $h^{(t)*} H (h^{(t)*})^{-1} \subset H^*$.*

2. В силу леммы 1 пространство L преобразуется по регулярному представлению T группы H^*, для которого

$$T(h^*)p = h^* p \quad \forall p \in L, \quad \forall h^* \in H^*. \tag{2.1}$$

В качестве базиса в L естественно принять систему вектор-функций $h^{(t)*}p_{\nu\varphi}$ $(t = 1, 2, \ldots, \varkappa;\ \varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu)$, нумеруя их в следующем порядке: $h^{(1)*}p_{\nu 1}, h^{(1)*}p_{\nu 2}, \ldots, h^{(1)*}p_{\nu m_\nu}, h^{(2)*}p_{\nu 1}, h^{(2)*}p_{\nu 2}, \ldots, h^{(2)*}p_{\nu m_\nu}, \ldots, h^{(\varkappa)*}p_{\nu 1}, \ldots, h^{(\varkappa)*}p_{\nu m_\nu}$. Тогда базисные функции с номерами $m_\nu(t-1)+\varphi$ $(\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu)$ образуют базис в подпространстве $L^{(t)} \subset L$ $(t = 1, 2, \ldots, \varkappa)$.

Теорема 1. *Неприводимое представление τ^*_μ группы H^* входит в усеченном случае в регулярное представление T этой группы l^*_μ раз, причем*

$$l^*_\mu = \frac{1}{m} \sum_{h \in H} \chi_s(h) \overline{\chi^*_\mu(h)}. \tag{2.2}$$

Значения характера χ представления T могут быть записаны в виде

$$\chi(h^*) = \sum_{t=1}^{x} \sum_{s=(t-1)m_t+1}^{m_t t} T_{ss}(h^*) \quad \forall h^* \in H^*. \tag{2.3}$$

В соответствии со способом построения базиса в пространстве L из лемм 1, 2, 3, а также формул (1.5) и (2.1) следует, что при любом значении $t = 1, 2, \ldots, x$

$$\sum_{s=(t-1)m_t+1}^{m_t t} T_{ss}(h^*) = \begin{cases} \chi_s(h) & \forall h^* = h^{(t)*} h (h^{(t)*})^{-1}; \\ 0 & \forall h^* \overline{\in} h^{(t)*} H (h^{(t)*})^{-1}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Согласно общей теории представлений групп [2,3]

$$l^*_\mu = \frac{1}{m^*} \sum_{h^* \in H^*} \chi(h^*) \overline{\chi^*_\mu(h^*)}. \tag{2.5}$$

Отсюда, опираясь на соотношения (2.3) и (2.4), легко получить:

$$l^*_\mu = \frac{1}{m^*} \sum_{h^* \in H^*} \overline{\chi^*_\mu(h^*)} \sum_{t=1}^{x} \sum_{s=(t-1)m_t+1}^{m_t t} T_{ss}(h^*) =$$

$$= \frac{1}{m^*} \sum_{t=1}^{x} \sum_{h \in H} \overline{\chi^*_\mu [h^{(t)*} h (h^{(t)*})^{-1}]}\, \chi_s(h).$$

Так как характер представления на сопряженных элементах группы принимает равные значения, то последнее выражение без затруднений преобразовывается в искомое (2.2).

Следствие. *В пространстве L_μ, преобразующемся по представлению τ^*_μ, можно выбрать стандартный относительно представления τ_s базис, в котором матрицы $\hat{\tau}^*_\mu(h)$ операторов $\tau^*_\mu(h)$ будут квазидиагональными, а именно:*

$$\hat{\tau}^*_\mu(h) = \begin{vmatrix} \hat{\tau}^{(1)}_s(h) & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \hat{\tau}^{(l_\mu)}_s(h) \\ & & & B_s(h) \end{vmatrix} \quad \forall h \in H, \tag{2.6}$$

причем представление B_μ группы H, порожденное матрицами $B_\mu(h)$, не содержит неприводимое представление τ_ν, а

$$\hat{\tau}_\nu^{(r)}(h) = \hat{\tau}_\nu \quad \forall h \in H \ (r = 1, 2, \ldots, l_\mu^*). \tag{2.7}$$

Это следствие немедленно вытекает из теоремы 1, так как определенное по формуле (2.2) число l_μ^* согласно выражению (2.5) показывает, сколько раз неприводимое представление τ_ν входит в представление τ_μ^*, редуцированное на подгруппе H.

В дальнейшем предполагается, что матрицы $\hat{\tau}_\mu^*(h^*)$ записаны в стандартном относительно представления τ_ν базисе.

3. В монографии [1] построены специальные операторы

$$P_{\mu\rho}^{(f)*} = \frac{m_\mu^*}{m^*} \sum_{h^* \in H^*} \overline{\tau_{\mu\rho f}^*(h^*)}\, h^* \qquad (\rho, f = 1, 2, \ldots, m_\mu^*), \tag{3.1}$$

действующие в пространстве $L(p)$, порожденном вектор-функциями $h^* p$ ($h^* \in H^*$) и преобразующемся по регулярному представлению T группы H^*. Операторы $P_{\mu\rho}^{(f)*}$ обладают следующими важными свойствами:

$$P_{\mu\rho}^{(f)*} p = p_{\mu\rho}^{(f)*} \qquad (\rho, f = 1, 2, \ldots, m_\mu^*), \tag{3.2}$$

где $p_{\mu\rho}^{(f)*}(\rho, f = 1, 2, \ldots, m_\mu^*)$ — ρ-я базисная вектор-функция f-го подпространства $L_\mu^{(f)*}(p) \subset L(p)$, преобразующегося по представлению τ_μ^*:

$$P_{\mu\rho}^{(f)*} p_{\xi\sigma}^{(l)*} = \delta_{\mu\xi}\delta_{f\varepsilon} p_{\mu\rho}^{(l)*} \quad (\rho, f, l, \varepsilon = 1, 2, \ldots, m_\mu^*); \tag{3.3}$$

$$p = \sum_\mu \sum_{f=1}^{m_\mu^*} P_{\mu f}^{(f)*} p. \tag{3.4}$$

В формуле (3.4) при суммировании индекс μ пробегает все номера представлений τ_μ^*, входящих в представление T.

Нетрудно убедиться в том, что $L(p_{\cdot\varphi}) = L$ ($\varphi = 1, 2, \ldots, m_\cdot$). Это позволяет использовать в дальнейшем выражения (3.1)—(3.4). Следует только иметь ввиду, что в усеченном случае некоторые из операторов $P_{\mu\rho}^{(f)*}$ ($\rho, f = 1, 2, \ldots, m_\mu^*$) будут переводить функции $p_{\cdot\varphi}$ ($\varphi = 1, 2, \ldots, m_\cdot$) в ноль.

Теорема 2. *В усеченном случае разложение пространства L, рассматриваемого как $L(p_{\cdot\varphi})$ ($\varphi = 1, 2, \ldots, m_\cdot$), осуществляется операторами*

$$P_{\mu\rho}^{[(r-1)m_\nu+\varphi]*} \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m_\mu^*;\ r = 1, 2, \ldots, l_\mu^*)$$

и инвариантно относительно индекса φ, причем

$$P_{\mu\rho}^{[(r-1)m_\nu+\varphi]*} p_{\nu\varphi} = p_{\mu\rho r}^* = \frac{m_\mu^*}{m_\nu \varkappa} \sum_{\sigma=1}^{m_\nu} \sum_{t=1}^{\varkappa} \tau_{\mu\rho,(r-1)m_\nu+\sigma}^*(h^{(t)*}) \times$$

$$\times h^{(l)*} p_{\nu\varphi} (\rho = 1, 2, \ldots, m_\mu^*;\ r = 1, 2, \ldots, l_\mu^*;\ \varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu). \quad (3.5)$$

В самом деле, при разложении пространства $L(p_{\nu\varphi})$ $(\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu)$ согласно выражениям (3.1) и (3.2)

$$p_{\mu\rho}^{(l)*} = \frac{m_\mu^*}{m^*} \sum_{t=1}^{s} \sum_{h \in H} \overline{\tau_{\mu\rho f}^*(h^{(l)*}h)} h^{(l)*} h p_{\nu\varphi} = \frac{m_\mu^*}{m_\nu} \times$$

(3.6)

$$\times \sum_{\alpha=1}^{m_\mu^*} \sum_{t=1}^{s} \overline{\tau_{\mu\rho\alpha}^*(h^{(t)*})}\, h^{(t)*} \frac{m_\nu}{m} \sum_{h \in H} \overline{\tau_{\mu\alpha f}^*(h)}\, h p_{\nu\varphi} \quad (\rho, f = 1, 2, \ldots, m_\mu^*).$$

В соответствии со следствием из теоремы 1 и выражениями (3.1), (3.3) и (3.6) при $f > l_\mu^* m_\nu$ вектор-функции $p_{\mu\rho}^{(l)*} = 0$ $(\rho = 1, 2, \ldots, m_\mu^*)$. Если же $f \leqslant l_\mu^* m_\nu$, то, положив $f = (r-1)m_\nu + \alpha$, где $\alpha \leqslant m_\nu$, с помощью того же следствия и формул (3.1), (3.3) легко найти, что

$$\frac{m_\nu}{m} \sum_{h \in H} \tau_{\mu\alpha f}^*(h)\ h p_{\nu\varphi} = \delta_{\alpha\varphi} \sum_{\sigma=1}^{m_\nu} \delta_{\varepsilon,(r-1)m_\nu+\sigma} p_{\nu\sigma}. \quad (3.7)$$

Из вышесказанного вытекает, что все операторы (3.1), кроме перечисленных в теореме, переводят функцию $p_{\nu\varphi}$ $(\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu)$ в ноль. Подстановка соотношения (3.7) в равенство (3.6) окончательно доказывает теорему.

Вектор-функцию $p_{\mu\rho r}^*$ $(\rho = 1, 2, \ldots, m_\mu^*)$ естественно трактовать как ρ-ю базисную функцию r-го неприводимого подпространства $L_{\mu r} \subset L$ $(r = 1, 2, \ldots, l_\mu^*)$, которое преобразуется по представлению τ_μ^*.

С помощью теоремы 2 легко построить аналог выражения (3.4) в усеченном случае:

Теорема 3. *В усеченном случае имеет место следующее разложение*

$$p_{\nu\varphi} = \sum_{\mu} \sum_{r=1}^{l_\mu^*} p_{\mu,(r-1)m_\nu+\varphi,r}^* \quad (\varphi = 1, 2, \ldots, m_\nu), \quad (3.8)$$

где индекс μ при суммировании пробегает номера всех неприводимых представлений τ_μ^*, входящих в соответствии с теоремой 1 в регулярное представление T группы H^*.

В заключение нужно отметить, что исследование, проведенное в настоящей статье, включает в себя, как частную, задачу из [1] о разложении функции, определенной на области Ω^*. Данное в работе [1] решение отвечает усеченному случаю с подгруппой H, состоящей только из единичного элемента.

Одесский инженерно-строительный институт

Մ. Լ. ԲՈՒՐԻՇԿԻՆ

Հատված դեպքում սիմետրիայի վերջավոր խմբով տիրույթում որոշված վեկտոր-ֆունկցիաների վերլուծությունը

Մեխանիկայի մի շարք կիրառական խնդիրներում ([2,4]) *հաճախ օգտագործվում է* H^* *սիմետրիայի խմբով օժտված* Ω^* *տիրույթում որոշված* p *վեկտոր-ֆունկցիայի վերլուծությունը* ([1])։ *Սակայն, եթե* p *ֆունկցիան ձևափոխվում է* $H \subset H^*$ *ենթախմբի* τ_0 *չբերվող ներկայացումով, ապա այդ վերլուծությունը դառնում է աննպատակահարմար։ Ներկա աշխատանքում* ([1])*-ի արդյունքները ընդհանրացվում են թեորեմ* 1, 2, 3*-ում այնպես, որ նրանք մնում են էֆեկտիվ նշված դեպքի համար, որը կոչվում է հատված։ Թեորեմ* 1*-ում ապացուցվում է, որ հատված դեպքում ռեգուլյար ներկայացման մեջ մտնող* H^* *խմբի* τ^*_μ *չբերվող ներկայացման թիվը գտնվում է* (2.2) *բանաձևով, իսկ թեորեմ 3-ում բերվում է վեկտոր-ֆունկցիայի վերլուծության* (3.8) *ընդհանուր տեսքը։* $p^*_{\mu\beta\varphi}$ *բազիսային ֆունկցիաները* (3.8)*-ում որոշվում են* (3.5) *առնչությամբ։*

Սիմետրիկ մեխանիկական սիստեմի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը բնութագրող վեկտոր-ֆունկցիաների պրակտիկ վերլուծությունը (2.2), (3.5) *և* (3.5) *բանաձևերի միջոցով դժվարություն չի ներկայացնում։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. Г. Каплан*, Симметрия многоэлектронных систем, Изд. «Наука», М., 1969. [2] *Ю. И. Самойленко*, Респ. сб. КВТ, в. 6, К. (1970). [3] *Г. Я. Любарский*, Теория групп и ее применение в физике, ГИФМЛ, 1958. [4] *М. Л. Бурышкин, В. А. Семенов* ДАН Арм. ССР, т. 55, № 3 (1972).