ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIII 1976 3

УДК 536.24

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

Смешанная граничная задача теплопроводности для прямоугольника

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/VI 1976)

В работах ([1]–[4]) даны решения смешанных краевых задач теплопроводности для бесконечного цилиндра и полуплоскости. В настоящей работе приводится решение задачи плоского стационарного распределения тепла в прямоугольной области при наличии теплообмена с окружающей средой, когда коэффициенты теплообмена произвольным образом изменяются по контуру. Предполагаем, что внутри области имеются источники тепла, интенсивность которых линейно зависит от температуры тела. Функция распределения температуры $U(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=-\alpha U-\frac{1}{\lambda}w(x, y) \tag{1}$$

и граничным условиям

$$-\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=0}=h_0(y)[T_0(y)-U(0, y)];\quad \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=c}=h_1(y)[T_1(y)-U(c, y)];$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y}\bigg|_{y=0}=h_2(x)[S_0(x)-U(x, 0)];\quad \frac{\partial U}{\partial y}\bigg|_{y=d}=h_3(x)[S_1(x)-U(x, d)]. \tag{2}$$

Здесь $h_0(y)$, $h_1(y)$, $h_2(x)$, $h_3(x)$, $T_0(y)$, $T_1(y)$, $S_0(x)$ и $S_1(x)$ — соответственно коэффициенты теплообмена и температура окружающей среды у границ $x=0$, $x=c$, $y=0$ и $y=d$. Относительно этих функций, а также $w(x, y)$ предполагаем, что они имеют ограниченную вариацию. Кроме того, исходя из физического смысла, предполагаем, что коэффициенты теплообмена неотрицательны, а также, что $\alpha<0$. Прежде, чем перейти к нахождению решения, преобразуем граничные условия (2) к следующему виду:

$$-\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=0}+h_0^*U(0, y)=h_0(y)T_0(y)-[h_0(y)-h_0^*]U(0, y);$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=c} + h_1^* U(c, y) = h_1(y) T_1(y) - [h_1(y) - h_1^*] U(c, y);$$

$$-\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} + h_2^* U(x, 0) = h_2(x) S_0(x) - [h_2(x) - h_2^*] U(x, 0); \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=d} + h_3^* U(x, d) = h_3(x) S_1(x) - [h_3(x) - h_3^*] U(x, d),$$

где

$$h_0^* = \frac{1}{d}\int_0^d h_0(y)dy; \quad h_1^* = \frac{1}{d}\int_0^d h_1(y)dy; \quad h_2^* = \frac{1}{c}\int_0^c h_2(x)dx; \quad h_3^* = \frac{1}{c}\int_0^c h_3(x)dx.$$

Разложим далее $U(x, y)$ в ряд

$$U(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\eta_k(y), \qquad (4)$$

где $f_k(x) = \int_0^d U(x, y)\eta_k(y)dy$, а $\eta_k(y)$ являются собственными функциями краевой задачи

$$\eta''(y) + \gamma^2\eta(y) = 0; \quad -\eta'(0) + h_2^*\eta(0) = \eta'(d) + h_3^*\eta(d) = 0 \qquad (5)$$

и имеют вид:

$$\eta_k(y) = \sqrt{\frac{2}{d}}\left[1 + \frac{h_2^{*2}}{\gamma_k^2} + \frac{(h_2^* + h_3^*)(\gamma_k^2 + h_2^* h_3^*)}{\gamma_k^2(\gamma_k^2 + h_3^{*2})d}\right]^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\gamma_k y + \frac{h_2^*}{\gamma_k}\sin\gamma_k y\right),$$

причем собственные значения γ_k являются корнями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}\gamma_k d = \frac{\gamma_k(h_2^* + h_3^*)}{\gamma_k^2 - h_2^* h_3^*}. \qquad (6)$$

Функции $\eta_k(y)$, ортогональные и нормированные в $[0, d]$, составляют полную систему ([5]). Заметим, что корни уравнения (6) заключены в пределах ([6])

$$\frac{k\pi}{d} + \frac{h_2^* + h_3^*}{k\pi}\left[1 + \frac{2(h_2^* + h_3^*)d + (h_2^{*2} + h_3^{*2})d^2}{2k^2\pi^2}\right]^{-1} < \gamma_k < \frac{k\pi}{d} + \frac{h_2^* + h_3^*}{k\pi}. \qquad (7)$$

Для определения коэффициентов разложения (4) умножим уравнение (1) на $\eta_k(y)dy$ и, проинтегрировав по y от 0 до d, получим

$$f_k''(x) - (\gamma_k^2 - \alpha)f_k(x) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^d w(x, y)\eta_k(y)dy - \eta_k(d)\left[\frac{\partial U}{\partial y} + h_3^* U\right]_{y=d} -$$

$$-\eta_k(0)\left[-\frac{\partial U}{\partial y}+h_2^*U\right]\Bigg|_{y=0}. \tag{8}$$

В правую часть уравнения (8) входят неизвестные значения $\frac{\partial U}{\partial y}+h_3^*U$ на $y=d$ и $-\frac{\partial U}{\partial y}+h_2^*U$ на $y=0$. Представив их в виде рядов:

$$-\frac{\partial U}{\partial y}\bigg|_{y=0}+h_2^*U(x,0)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n_j^{(0)}}{\sqrt{j+1}}\theta_j(0)\theta_j(x);$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}\bigg|_{y=d}+h_3^*U(x,d)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n_j^{(1)}}{\sqrt{j+1}}\theta_j(c)\theta_j(x), \tag{9}$$

где $\theta_j(x)$ — собственные функции краевой задачи

$$\theta''(x)+\delta^2\theta(x)=0;\quad -\theta'(0)+h_0^*\theta(0)=\theta'(c)+h_1^*\theta(c)=0 \tag{10}$$

и подставляя в (8), после некоторых преобразований получим для $U(x,y)$ следующее выражение

$$U(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\eta_k(y)}{L_k}\Bigg\{L_k^{(1)}(x)\left[\frac{m_k^{(0)}}{\sqrt{k+1}}\eta_k(0)+\frac{1}{\lambda\nu_k}\int_0^x w_k(x_1)L_k^{(2)}(x_1)dx_1\right]+$$

$$+L_k^{(2)}(x)\left[\frac{m_k^{(1)}}{\sqrt{k+1}}\eta_k(d)+\frac{1}{\lambda\nu_k}\int_x^c w_k(x_1)L_k^{(1)}(x_1)dx_1\right]\Bigg\}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta_k(x)}{M_k\sqrt{k+1}}\left[n_k^{(0)}\theta_k(0)M_k^{(1)}(y)+n_k^{(1)}\theta_k(c)M_k^{(2)}(y)\right]. \tag{11}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$L_k^{(1)}(x)=\nu_k\,\mathrm{ch}\,\nu_k(c-x)+h_1^*\,\mathrm{sh}\,\nu_k(c-x);\quad L_k^{(2)}(x)=\nu_k\,\mathrm{ch}\,\nu_k x+h_0^*\,\mathrm{sh}\,\nu_k x;\quad \nu_k=\sqrt{\gamma_k^2-\alpha};$$

$$L_k=(\nu_k^2+h_0^*h_1^*)\,\mathrm{sh}\,\nu_k c+\nu_k(h_0^*+h_1^*)\,\mathrm{ch}\,\nu_k c;\quad w_k(x)=\int_0^d w(x,y)\eta_k(y)dy;$$

$$M_k^{(1)}(y)=\mu_k\,\mathrm{ch}\,\mu_k(d-y)+h_3^*\,\mathrm{sh}\,\mu_k(d-y);\quad M_k^{(2)}(y)=\mu_k\,\mathrm{ch}\,\mu_k y+h_2^*\,\mathrm{sh}\,\mu_k y;$$

$$M_k=(\mu_k^2+h_2^*h_3^*)\,\mathrm{sh}\,\mu_k d+\mu_k(h_2^*+h_3^*)\,\mathrm{ch}\,\mu_k d;\quad \mu_k=\sqrt{\delta_k^2-\alpha}. \tag{12}$$

Для определения неизвестных постоянных $m_k^{(l)}$, $n_k^{(l)}$ $(l=0;1)$ удовлетворим граничным условиям (3). Умножая первые два из условий (3) на $\eta_k(y)dy$ и интегрируя по y от 0 до d, будем иметь

$$m_k^{(0)} = -\frac{\sqrt{k+1}}{\eta_k(0)} \int_0^d [h_0(y) - h_0^*] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j+1}} \left[\frac{\eta_j(y)}{L_j} \left(m_j^{(0)} \gamma_j(0) L_j^{(1)}(0) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + m_j^{(1)} \nu_j \eta_j(d) \right) + \frac{\theta_j(0)}{M_j} \left(n_j^{(0)} \theta_j(0) M_j^{(1)}(y) + n_j^{(1)} \theta_j(c) M_j^{(2)}(y) \right) \right] \eta_k(y) dy + \zeta_k^{(0)};$$

$$m_k^{(1)} = -\frac{\sqrt{k+1}}{\eta_k(d)} \int_0^d [h_1(y) - h_1^*] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j+1}} \left[\frac{\eta_j(y)}{L_j} \left(m_j^{(0)} \nu_j \eta_j(0) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + m_j^{(1)} \eta_j(d) L_j^{(2)}(c) \right) + \frac{\theta_j(c)}{M_j} \left(n_j^{(0)} \theta_j(0) M_j^{(1)}(y) + n_j^{(1)} \theta_j(c) M_j^{(2)}(y) \right) \right] \eta_k(y) dy + \zeta_k^{(1)}, \tag{13}$$

где

$$\zeta_k^{(0)} = \frac{\sqrt{k+1}}{\eta_k(0)} \int_0^d \left[h_0(y) T_0(y) - \frac{1}{\lambda} (h_0(y) - h_0^*) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta_j(y)}{L_j} \int_0^c w_j(x) L_j^{(1)}(x) dx \right] \eta_k(y) dy;$$

$$\zeta_k^{(1)} = \frac{\sqrt{k+1}}{\eta_k(d)} \int_0^d \left[h_1(y) T_1(y) - \frac{1}{\lambda} (h_1(y) - h_1^*) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\eta_j(y)}{L_j} \int_0^c w_j(x) L_j^{(2)}(x) dx \right] \eta_k(y) dy. \tag{14}$$

Аналогично, умножая последние два из условий (3) на $\theta_k(x)dx$ и интегрируя по x от 0 до c, получим:

$$n_k^{(0)} = -\frac{\sqrt{k+1}}{\theta_k(0)} \int_0^c [h_2(x) - h_2^*] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j+1}} \left[\frac{\eta_j(0)}{L_j} \left(m_j^{(0)} \eta_j(0) L_j^{(1)}(x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + m_j^{(1)} \eta_j(d) L_j^{(2)}(x) \right) + \frac{\theta_j(x)}{M_j} \left(n_j^{(0)} \theta_j(0) M_j^{(1)}(0) + n_j^{(1)} \mu_j \theta_j(c) \right) \right] \theta_k(x) dx + \xi_k^{(0)};$$

$$n_k^{(1)} = -\frac{\sqrt{k+1}}{\theta_k(c)} \int_0^c [h_3(x) - h_3^*] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j+1}} \left[\frac{\eta_j(d)}{L_j} \left(m_j^{(0)} \eta_j(0) L_j^{(1)}(x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + m_j^{(1)} \eta_j(d) L_j^{(2)}(x) \right) + \frac{\theta_j(x)}{M_j} \left(n_j^{(0)} \mu_j \theta_j(0) + n_j^{(1)} \theta_j(c) M_j^{(2)}(d) \right) \right] \theta_k(x) dx + \xi_k^{(1)}. \tag{15}$$

Здесь обозначено:

$$\xi_k^{(0)} = \frac{\sqrt{k+1}}{\theta_k(0)} \int_0^c \left[h_2(x) S_0(x) - \frac{1}{\lambda} (h_2(x) - h_2^*) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta_j(0)}{\nu_j L_j} \left(L_j^{(1)}(x) \int_0^x w_j(x_1) L_j^{(2)}(x_1) dx_1 \right.\right.$$

$$+$$

$$+ L_j^{(2)}(x) \int_x^c w_j(x_1) L_j^{(1)}(x_1)\, dx_1 \Big) \Big| \theta_k(x)\, dx;$$

(16)

$$\xi_k^{(1)} = \frac{\sqrt{k+1}}{\theta_k(c)} \int_0^c \Big| h_3(x) S_1(x) - \frac{1}{\lambda} (h_3(x) - h_3^*) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta_j(d)}{\nu_j L_j} \Big(L_j^{(1)}(x) \int_0^x w_j(x_1) L_j^{(2)}(x_1)\, dx_1 +$$

$$+ L_j^{(2)}(x) \int_x^c w_j(x_1) L_j(x_1)\, dx_1 \Big) \Big| \theta_k(x)\, dx.$$

Таким образом, для определения постоянных $m_k^{(0)}$, $m_k^{(1)}$, $n_k^{(0)}$ и $n_k^{(1)}$ получили совокупность четырех бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (13) и (15). Для исследования этих систем оценим предварительно суммы модулей коэффициентов при неизвестных в каждом из уравнений. Рассмотрим, например, сумму модулей коэффициентов в k-м уравнении первой из систем (13):

$$\sigma_{m_k} = \frac{\sqrt{k+1}}{\eta_k(0)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j+1}} \left\{ \frac{L_j^{(1)}(0) + \nu_j |\eta_j'(d)|}{L_j} \left| \int_0^d [h_0(y) - h_0^* | \eta_j(y) \eta_k(y)\, dy \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta_j(0)}{M_j} \left| \int_0^d |h_0(y) - h_0^*| \Big| \theta_j(0) M_j^{(1)}(y) + |\theta_j(c)| M_j^{(2)}(y) \Big| \eta_k(y)\, dy \right| \right\}. \qquad (17)$$

Производя оценку интегралов, входящих под знак суммы в выражении (17), и учитывая предположенную выше ограниченность вариации коэффициентов теплообмена, после упрощений получаем

$$\sigma_{m_k} < \frac{124 H_0 d}{\sqrt{k}\, \pi^2} \left| 1 + \frac{d}{\pi c} e^{-\frac{\pi c}{2d}} + \frac{2}{7} e^{-\frac{\pi d}{2c}} \left(1 + \frac{c}{\pi d} \right) \right|. \qquad (18)$$

Здесь $H_0 = \max\limits_{0 \le y \le d} [|h_0(y) - h_0^*|;\ V(h_0(y) - h_0^*)]$; $V(h(y))$ — полная вариация $h(y)$ в промежутке $[0, d]$. Из (18) усматриваем, что, начиная от $k \geq P^2$, где $P = \frac{124 H_0 d}{\pi^2} \left| 1 + \frac{a}{\pi c} e^{-\frac{\pi c}{2d}} + \frac{2}{7} e^{-\frac{\pi d}{2c}} \left(1 + \frac{c}{\pi d} \right) \right|$, сумма модулей коэффициентов k-го уравнения становится меньше 1 и при возрастании k стремится к нулю с быстротой $\frac{P}{\sqrt{k}}$. Свободные члены $\tau_k^{(0)}$, согласно предположениям относительно $T_l(y)$ и $w(x, y)$, оставаясь ограниченными в своей совокупности, убывают с быстротой $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Аналогичные оценки получаем для остальных систем (13) и (15). Таким образом, совокупность систем (13) и (15) квазирегулярса и, согласно теории бесконечных систем ([7]), имеют место единственность ограниченного решения и сходимость процесса последовательных приближений. Заметим, что, как показано в работе ([2]), при конкретном задании закона изменения коэффициентов теплообмена и температуры окружающей среды, преобразованием $m_k^{(l)}$ и $n_k^{(l)}$ можно значительно усилить быстроту убывания коэффициентов, определяемых из бесконечных систем, что позволяет существенно уменьшить число операций, необходимых для получения заданной точности решения.

Институт математики Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Ջերմահաղորդականության խառը եզրային խնդիր ուղղանկյան համար

Հոդվածում դիտարկվում է ջերմության հարթ ստացիոնար բաշխումը ուղղանկյան մեջ՝ շրջապատող միջավայրի հետ ջերմափոխանակության առկայության դեպքում, երբ ջերմափոխանակության գործակիցները կամայական ձևով փոփոխվում են եզրագծով։ Խնդրի լուծումը տրվում է շարքով՝ ըստ համապատասխան եզրային խնդրի սեփական ֆունկցիաների։ Եզրային պայմանների բավարարումը բերում է շարքի անհայտ գործակիցների որոշման համար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների։ Ապացուցվում է նրանց սահմանափակ լուծման միակությունը և հաջորդական մոտավորությունների մեթոդի զուգամիտությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. С. Минасян*, ДАН Арм. ССР, т. XXXIX, № 5 (1964). [2] *Р. С. Минасян*, В кн.: Тепло- и массоперенос, т. VIII, Вопросы теории тепло- и массопереноса, Минск, 1968. [3] *Б. А. Васильев*, Дифференциальные уравнения, т. 10, № 7, 1974. [4] *Л. Б. Ефимов, В. Н. Воробьев*, ИФЖ, т. 26, № 5, 1974. [5] *Б. М. Левитан*, Разложения по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, Гостехиздат, М.—Л., 1950. [6] *Р. С. Минасян*, ДАН Арм. ССР, т. XXVIII, № 4 (1959). [7] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов*, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М.—Л., 1962.