УДК 517.43

МАТЕМАТИКА

В. А. Золотарев

О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 24/V 1976)

Линейные ограниченные операторы A_k ($k = 1, \dots, n$), определенные в гильбертовом пространстве H , называются дважды перестановочными ⁽¹⁾, если $A_k A_s = A_s A_k$, $A_k A_s^* = A_s^* A_k$ ($k \neq s$).

Оператор A в H называется вполне несамосопряженным, если $H = \bigvee_{k \geq 0} A^k (\overline{A_1 H})$, где $A_1 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$. Символом $\bigvee_{k \geq 0} A^k (\overline{A_1 H})$ мы будем обозначать замкнутую линейную оболочку векторов вида: $A^k h$, $k \geq 0$, $h \in \overline{A_1 H}$ ^(2,3).

Пространство $H' = \bigvee_{m_1, \dots, m_n \geq 0} A_1^{m_1} \dots A_n^{m_n} h_0$, $h_0 \in H_0 = \bigcap_{k=1}^n (\overline{A_k})_1 H$ мы будем называть главной компонентой системы дважды перестановочных операторов A_k ($k = 1, \dots, n$). Оказывается, что H' является пересечением главных компонент ^(2,3) операторов A_k ($k = 1, \dots, n$)

Возможны два случая:

1. Пространство H' совпадает с H . В этом случае систему дважды перестановочных операторов A_k ($k = 1, \dots, n$) мы будем называть вполне несамосопряженно .

2. Пространство H' не совпадает с H . Тогда $H'' = H \ominus H'$ и H' приводят каждый оператор A_k ($k = 1, \dots, n$). Кроме того H'' распадается в ортогональную сумму конечного числа подпространств, каждое из которых приводит все A_k ($k = 1, \dots, n$), причем на каждом из этих подпространств хотя бы один из операторов A_k ($k = 1, \dots, n$) самосопряжен.

В настоящей заметке мы ограничимся случаем вполне несамосопряженной системы A_k ($k = 1, \dots, n$). Соответствующие результаты легко могут быть получены и в общем случае.

Важную роль для дальнейшего играет следующая система дважды перестановочных операторов. Пусть $D = \prod_{k=1}^n [0, b_k]$ — n — мерный параллелепипед, и $a_k(x_k)$ — вещественные, ограниченные, неубывающие функции на $[0, b_k]$. Обозначим через $a_k(x_k)$, J_k ($k =$

$= 1, \dots, n$) матрицы размера $(r \times r)$ такие, что $a_k(x_k) \geq 0$ при $x_k \in [0, b_k]$, $\int_0^{b_k} a_k(x_k) dx_k = 1$, а J_k — инволюции ($J_k = J_k^*$, $J_k^2 = I$), причем:

1. $a_k(x_k) a_s(x_s) = a_s(x_s) a_k(x_k)$ п. в. при $x_p \in [0, b_p]$, $p = k, s$, ($k \neq s$);
2. $a_k(x_k) J_s = J_s a_k(x_k)$ п. в. при $x_k \in [0, b_k]$ ($k \neq s$);
3. $J_k J_s = J_s J_k$.

Введем в рассмотрение пространство $M_r^2(D)$:

$$M_r^2(D) = \left\{ f(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x)) : \int_D f(x) \prod_{k=1}^n a_k(x_k) f^*(x) dx < \infty, x = (x_1, \dots, x_n) \in D \right\} \quad (1)$$

где $dx = dx_1 \dots dx_n$. Мы предполагаем, что $\int_D \prod_{k=1}^n a_k(x_k) dx < \infty$.

Пространство $M_r^2(D)$ становится гильбертовым после факторизации по ядру введенной метрики; его мы и назовем $L_r^2(D)$. Зададим n операторов в $L_r^2(D)$ формулами:

$$(A_k f)(x) = a_k(x_k) f(x) + i \int_0^{x_k} f(x_1, \dots, x_{k-1}, t_k, x_{k+1}, \dots, x_n) a_k(t_k) J_k dt_k, \quad (2)$$

($k = 1, \dots, n$), $f(x) \in L_r^2(D)$. Легко видеть, что ядро метрики состоит

из таких функций $f(x) \in M_r^2(D)$, что: $\prod_{k=1}^n a_k(x_k) f(x) = 0$ п. в. при $x =$

$= (x_1, \dots, x_n) \in D$. Очевидно, если $f(x)$ принадлежит ядру метрики,

то и $(A_k f)$, ($k = 1, \dots, n$) принадлежат ядру метрики. То есть, система операторов A ($k = 1, \dots, n$) формулами (2) определена на $L_r^2(D)$

корректно. Операторы A_k — дважды перестановочны ($k = 1, \dots, n$).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть A_k ($k = 1, \dots, n$) — заданная система дважды перестановочных операторов в H , причем:

1. $H_0 = \bigcap_{k=1}^n (A_k)_1 H$ — конечномерно;
2. спектр каждого оператора A_k вещественен ($k = 1, \dots, n$).

Тогда существует пространство $L_r^2(D)$ и операторы A_k в нем ($k =$

$= 1, \dots, n$) (см. (1), (2)), а также изометрический оператор U ,

отображающий главную компоненту системы операторов A_k ($k =$

$= 1, \dots, n$) на главную компоненту модельной системы операторов A_k ($k =$

$= 1, \dots, n$) так, что $A_k U^{-1} A_k U$ ($k = 1, \dots, n$).

Если у операторов A_k ($k = 1, \dots, n$) есть невещественный спектр, то можно построить дискретную модель, аналогичную модели (1), (2).

Пусть $\dim H_0 = 1$, $n = 1$ и λ_k последовательность комплексных чисел из верхней полуплоскости таких, что:

$$\sum_1^N \operatorname{Im} \lambda_k < \infty, \quad 2 \operatorname{Im} \lambda_k = \beta_k^2, \quad \beta_k > 0 \quad (k = 1, \dots, N, \quad N \leq \infty)$$

Введем пространство $l^2(\beta)$:

$$l^2(\beta) = \{f(k) \ (k = 1, \dots, N) : \sum_{k=1}^n |f(k)|^2 \beta_k^2 < \infty\}$$

и оператор A ; $(Af)(k) = \lambda_k f(k) + i \sum_{s=1}^{k-1} f(s) \beta_s^2$.

Используя эту модель, можно в теореме 1 освободиться от условия вещественности спектра.

II. Пусть задана система линейных ограниченных операторов $A_k (k = 1, \dots, n)$. Тогда существуют операторы (φ) и $\sigma_k (k = 1, \dots, n)$ такие, что φ отображает H на некоторое гильбертово пространство E , σ_k определенные на E самосопряженные операторы $(k = 1, \dots, n)$,

причем $2(A_k)_I = \varphi^* \sigma_k \varphi \quad (k = 1, \dots, n)$. Функция $S(\vec{\xi}, \lambda) = I - i\varphi \left(\sum_1^n \xi^k A_k - \lambda I \right)^{-1} \varphi^* \left(\sum_1^n \xi^k \sigma_k \right)$ называется характеристической операторной функцией системы операторов $A_1, \dots, A_n$, ξ^k — вещественны $(k = 1, \dots, n)$ и $\vec{\xi} = (\xi^1, \dots, \xi^n)$.

Одним из главных результатов теории несамосопряженных операторов в случае $n = 1$ заключается в следующем. Каждому ограниченному оператору, с конечномерной мнимой компонентой и вещественным спектром можно сопоставить задачу Коши на интервале $0 \leq x \leq l$:

$$\frac{d}{dx} (a(x) - i) f(x, i) + f(x, i) a(x) J = 0,$$

$$f(0, i) = u_0, \quad a(x) \geq 0 \quad \text{п. в. при } x \in [0, l], \quad J$$

инволюция (2.3) причем, характеристическая функция оператора A совпадает с матрицей монодромии этого уравнения $W(l, i)$ (3) . Оказывается, что этот факт можно обобщить на случай семейства дважды перестановочных операторов $A_k (k = 1, \dots, n)$. Сформулируем его для случая $n = 2$.

Пусть $\dim H_0 = r$, $G = \bigvee_{k=1,2} H_k$ и $\sigma_k = 2P_G (A_k)_I P_G$, где P_G — ортопроектор на G . Тогда характеристическая функция $S(\vec{\xi}, \lambda)$ может быть записана в виде:

$$S(\vec{\xi}, \lambda) = I - iP_G \left(\sum_1^2 \xi^k A_k - \lambda I \right)^{-1} P_G \left(\sum_1^2 \xi^k \sigma_k \right).$$

Теорема 2. Пусть A_1, A_2 — вполне несамосопряженная система дважды перестановочных операторов таких, что:

- 1) $\dim H_0 = r < \infty$;
- 2) спектр A_k вещественен, $k = 1, 2$.

Тогда существует система гиперболических уравнений в частных производных вида:

$$i\xi^1 \frac{\partial}{\partial x} f(x_1, x_2) a_1(x_1) J_1 + i\xi^2 \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) a_2(x_2) J_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\sum_1^2 \xi^k a_k(x_k) - \lambda \right) \times \\ \times f(x_1, x_2) = 0 \quad (3)$$

с условиями на характеристиках $x_k = 0$ ($k = 1, 2$):

$$i\xi^1 f(x_1, 0) a_1(x_1) J_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_1^2 \xi^k a_k(x_k) - \lambda \right) f(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \frac{\partial}{\partial x_1} u_1(x_1) \xi^2 \Gamma_2 J_2 \\ i\xi^2 f(0, x_2) a_2(x_2) J_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_1^2 \xi^k a_k(x_k) - \lambda \right) f(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial}{\partial x_2} u_2(x_2) \xi^1 \Gamma_1 J_1 \quad (4) \\ \left(\sum_1^2 \xi^k a_k(x_k) - \lambda \right) f(x_1, x_2) \Big|_{\substack{x_k=0 \\ k=1,2}} = u_1(0) \xi^2 \Gamma_2 J_2 + u_2(0) \xi^1 \Gamma_1 J_1 + u_0 \left(\sum_1^2 \xi^k \Gamma_k J_k \right),$$

где $u = u_1(x_1) + u_2(x_2) + u_0$ заданная функция, причем $\int_0^{b_k} u_k(x_k) a_k(x_k) dx_k = 0$ ($k = 1, 2$), u_0 — константа; $a_k(x_k) \geq 0$ при $x_k \in [0, b_k]$, J_k — инволюции ($k = 1, 2$), причем $\Gamma_k = \int_0^{b_k} a_k(x_k) dx_k$ ($k = 1, 2$). По функции $f(x_1, x_2)$, являющейся решением уравнения (3) с краевыми условиями (4) при заданной функции u , определим функцию $v = v_1(x_1) + v_2(x_2) + v_0$ ($\int_0^{b_k} v_k(x_k) a_k(x_k) dx_k = 0$, $k = 1, 2$; v_0 — константа) следующими соотношениями на характеристиках $x_k = b_k$ ($k = 1, 2$):

$$i\xi^1 f(x_1, b_2) a_1(x_1) J_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_1^2 \xi^k a_k(x_k) - \lambda \right) f(x_1, x_2) \Big|_{x_2=b_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} v_1(x_1) \xi^2 \Gamma_2 J_2 \\ i\xi^2 f(b_1, x_2) a_2(x_2) J_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_1^2 \xi^k a_k(x_k) - \lambda \right) f(x_1, x_2) \Big|_{x_1=b_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} v_2(x_2) \xi^1 \Gamma_1 J_1 \\ \left(\sum_1^2 \xi^k a_k(x_k) - \lambda \right) f(x_1, x_2) \Big|_{\substack{x_k=b_k \\ k=1,2}} = v_1(b_1) \xi^2 \Gamma_2 J_2 + v_2(b_2) \xi^1 \Gamma_1 J_1 + v_0 \left(\sum_1^2 \xi^k \Gamma_k J_k \right).$$

Тогда $S(\xi, \lambda)$ сопоставляет функции u на одной паре характеристик ($x_k = 0$, $k = 1, 2$) значения v на другой паре характеристик ($x_k = b_k$, $k = 1, 2$); то есть $S(\xi, \lambda)u = v$.

Соответствующие результаты, аналогичные теореме 2, переносятся на случай произвольного n .

Идею доказательства теоремы и саму теорему 2 в случае $r = 1$, $a_k(x_k) = 0$, $a_k(x_k) = J_k = 1$, ($k = 1, 2$) устно сообщил автору М. С. Лившиц.

В заключение приношу глубокую благодарность М. С. Лившицу за постановку задач и руководство работой.

Харьковский государственный университет

Երկու անգամ տեղափոխելի օպերատորների սխեմաների
եռանկյան մոդելների մասին

Ի հիշբերության տարածության մեջ սահմանված $A_k (k = 1, \dots, n)$ օպերատորների սխեմանը կոչվում է երկու անգամ տեղափոխելի, եթե $A_k A_s = A_s A_k$ $A_k A_s^* = A_s^* A_k$ ($k \neq s$).

Աշխատանքում դիտարկվում են երկու անգամ տեղափոխելի A_k օպերատորների եռանկյան մոդելներ H -ում՝ այնպիսին, որ $H_0 = \prod_{k=1}^n (A_k)$, H վերջավոր չափանի է և ամեն մի $A_k (k = 1, \dots, n)$ օպերատորի սպեկտրը իրական է:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Б Секефальви-Надь, Ч. Фояш, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, Изд. «Мир», М., 1970. ² М. С. Бродский, М. С. Лившиц, УМН, т. 13, № 1, М., 1958. ³ М. С. Бродский, Треугольные и жордановые представления линейных операторов, Изд. «Наука», М., 1969. ⁴ М. С. Лившиц, А. А. Янцевич, Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах, Харьков, ХГУ, 1971. ⁵ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, Изд. «Наука», М., 1967.