ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 2

УДК 517.52

МАТЕМАТИКА

Л. Х. Меграбян

О произведениях типа Бляшке в полуплоскости

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/VI 1976)

Как известно произведение Бляшке

$$B(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{|z_k|}{z_k}.$$

сходится тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<\infty$.

В теории классов $N_\alpha (-1<\alpha<\infty)$ М. М. Джрбашяна ([1]) рассматривались элементарные множители вида

$$A_\alpha(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)\exp[-W_\alpha(z; \zeta)], \tag{1}$$

удовлетворяющие условию

$$\lim_{r\to 1} \int_0^r (r-x)^{\alpha-1} \log|A_\alpha(xe^{i\varphi}, \zeta)|dx = 0 \tag{2}$$

на радиусах $re^{i\varphi}$ $(0\leq r<1)$ единичного круга. В работе ([1]), в частности, получена следующая теорема:

Бесконечное произведение типа Бляшке

$$B_\alpha(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_\alpha(z; z_k) \qquad (0<|z_k|<1,\ k=1, 2, \ldots)$$

сходится в круге $|z|<1$ и представляет там аналитическую функцию тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+1}<\infty. \tag{3}$$

Представляет интерес распространить этот результат на случай полуплоскости Π^+ $(\operatorname{Im} z>0)$, заменяя условие (2) некоторыми естественными условиями, относящимися к пучку прямых $\operatorname{Re}\lambda = c$, перпендикулярных к вещественной оси*.

В настоящей статье вводятся соответствующие средние условия и с их помощью удается перенести указанный выше результат М. М. Джрбашяна на случай полуплоскости.

Применяя результат М. С. Лившица (²), мы даем также реализацию полученных классов функций в рамках теории линейных систем с непрерывным временем.

1. Пусть $\mathfrak{M}_\alpha$ $(0<\alpha<\infty)$ пространство функций $f(t)$ $(0<t<\infty)$, удовлетворяющих условию $t^{\alpha-1}f(t)\in L(0,\infty)$. Оператор Вейля $D^{-\alpha}$ определяется на множестве $\mathfrak{M}_\alpha$ формулой

$$D^{-\alpha}f(y) = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}f(t+y)dt. \tag{4}$$

Нетрудно доказать следующие свойства оператора $D^{-\alpha}$, аналогичные свойствам оператора Римана—Лиувилля ([1,3]).

(а) Пусть $f\in\mathfrak{M}_{\alpha_1}$ и $D^{-\alpha_1}f\in\mathfrak{M}_{\alpha_2}$ $(\alpha_1,\alpha_2>0)$, тогда $D^{-\alpha_2}(D^{-\alpha_1}f)\in\mathfrak{M}_{\alpha_1+\alpha_2}$ и $D^{-\alpha_2}(D^{-\alpha_1}f) = D^{-\alpha_1}(D^{-\alpha_2}f) = D^{-(\alpha_1+\alpha_2)}f$;

(б) Пусть $f\in\mathfrak{M}_{\alpha_0}$ $(\alpha_0>0)$. Тогда, почти для всех y $(y>0)$ выполняется соотношение

$$\lim_{\alpha\to 0+} D^{-\alpha}f(y) = f(y);$$

(в) Пусть $u(\lambda)\equiv u(x, y)$ — гармоническая в $\Pi^+ = \{\lambda \operatorname{Im}\lambda>0\}$ функция, принадлежащая, как функция от y, пространству $\mathfrak{M}_\alpha(\alpha>0)$. Тогда функция

$$u_\alpha(x, y) = D^{-\alpha}u(x, y)^{**}$$

также является гармонической в Π^+;

(г) Если p — натуральное число, а D^p — оператор дифференцирования порядка p и $f\in\mathfrak{M}_p$, то

$$D^pD^{-p}f(y) = f(y).$$

Как показывает свойство (б) естественно определение оператора $D^{-\alpha}$ распространить и на значение $\alpha=0$, положив

$$D^0f(y) = f(y). \tag{5}$$

2. Рассмотрим следующую задачу. Пусть p — неотрицательное целое число. Требуется найти аналитическую в Π^+ функцию $w_p(\lambda;\zeta)$ $(\operatorname{Im}\zeta>0)$, такую, что для функции

$$u_p(\lambda,\zeta) = \frac{\lambda-\zeta}{\lambda-\bar\zeta}\exp\{-w_p(\lambda,\zeta)\}$$

---

* Эти результаты не могут быть получены путем дробно-линейного отображения круга на полуплоскость, так как при этом радиусы круга не переходят в прямые $\operatorname{Re}\lambda = c$

** Подразумевается, что оператор $D^{-\alpha}$ действует по аргументу y $(\lambda = x+iy)$

выполняются условия

1^0. $\log a_p(\lambda, \zeta)$ входит в область определения оператора D^{-p};

2^0. $\lim\limits_{Im\lambda\to 0} D^{-p}\log|a_p(\lambda;\zeta)| = 0$.

Заметим, что элементарный множитель Бляшке $\dfrac{\lambda-\zeta}{\lambda-\bar\zeta}$ не удовлетворяет условию $1^0 (p\geq 1)$. Однако всегда можно найти „регуляризующий“ множитель $\exp\{-w_p(\lambda:\zeta)\}$, так чтобы выполнялись условия 1^0, 2^0, причем этими условиями $w_p(\lambda:\zeta)$ определяются однозначно. А именно, для натурального p имеет место

Теорема 1. *В предположении* $\operatorname{Im}\zeta>0$, *функция* $a_p(\lambda;\zeta)$ *удовлетворяющая условиям* 1^0 *и* 2^0 *в полуплоскости* Π^+ *допускает следующее представление*

$$a_p(\lambda;\zeta)=\frac{\lambda-\zeta}{\lambda-\bar\zeta}\left(\frac{\lambda-\operatorname{Re}\zeta}{\lambda-\bar\zeta}\right)^{2(1-\delta_p)}\exp\left\{2\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left(\frac{\zeta-\bar\zeta}{\lambda-\bar\zeta}\right)^k-2\right.$$

$$\left.-2\sum_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]}\frac{1}{2k-\delta_p}\left(\frac{i\operatorname{Im}\zeta}{\lambda-\operatorname{Re}\zeta}\right)^{2k-\delta_p}\right\} \qquad (6)$$

где $\delta_p=\dfrac{1+(-1)^p}{2}$. *Наоборот, если* $a(\lambda:\zeta)$ *имеет вид* (6), *то удовлетворяет условиям* 1^0 *и* 2^0.

В частном случае $p=0$ доказывается, что $w_0(\lambda:\zeta)=0$ поэтому

$$a_0(\lambda;\zeta)=\frac{\lambda-\zeta}{\lambda-\bar\zeta}.$$

Таким образом, функция $a_p(\lambda;\zeta)$ является обобщением элементарного множителя Бляшке в верхней полуплоскости.

3. Пусть последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\Pi^+$ и образует ограниченное множество. Рассмотрим произведение

$$b_p(\lambda;\lambda_k)=\prod_{k=1}^{\infty}a_p(\lambda;\lambda_k) \qquad (7)$$

функций $a_p(\lambda;\lambda_k)$ $k=1, 2, \ldots$. Произведение $b_p(\lambda;\lambda_k)$ является естественным обобщением произведения Бляшке

$$b(\lambda;\lambda_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda-\bar\lambda_k}$$

сходимость которого эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{1}^{\infty}\operatorname{Im}\lambda_k<\infty.$$

Как уже говорилось во введении, элементарный множитель $A_p(z;\eta)$ $(|z|<1,\ 0<|\eta|<1)$ обладает тем свойством, что сходимость бесконечного произведения $B_p(z;z_k)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}A_p(z;z_k)$ типа Бляшке в единичном круге эквивалентна сходимости ряда (3). Оказывается, что найденный нами множитель $a_p(\lambda; \zeta)$ играет в случае полуплоскости роль, аналогичную множителю $A_p(z; \eta)$. Имеет место

Теорема 2. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset \Pi^+$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Im} \lambda_k)^{p+1} < \infty. \tag{8}$$

Тогда бесконечное произведение

$$b_p(\lambda; \lambda_k) = \prod_{k=1}^{\infty} a_p(\lambda; \lambda_k),$$

где $a_p(\lambda; \zeta)$ *определяется выражением* (6), *равномерно и абсолютно сходится в каждом множестве* $\Pi_y^+ = \{\lambda; \operatorname{Im}\lambda > y > 0\}$ *и определяет функцию* $b_p(\lambda; \lambda_k)$ *— аналитическую в верхней полуплоскости, обращающуюся в нуль лишь на последовательности* $\{\lambda_k\}_1^\infty$. *Если произведение* (7) *сходится в* Π^+, *то последовательность* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (8).

4. Как известно [2], движение линейной системы в зависимости от времени t описываются уравнениями вида

$$i\frac{dh}{dt} + Ah = \psi u(t),$$

$$h|_{t_0} = h_0 \qquad (t_0 < t \leq t_1),$$

$$v(t) = Ku(t) - i\varphi h.$$

где $h \in H$; $u(t)$, $v(t) \in E$; H и E — гильбертовы пространства, а $A: H \to H$, $\varphi: H \to E$, $\psi: E \to H$, $K: E \to E$ — линейные операторы.

В случае $u(t) = ue^{i\lambda t}$ $(\operatorname{Im}\lambda > o)$ получим

$$h(t) = R(\lambda)u(t),$$

$$v(t) = S(\lambda)u(t),$$

где отображения

$$R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}\psi,$$

$$S(\lambda) = K - i\varphi(A - \lambda I)^{-1}\psi$$

в совокупности называются открытой системой F, ассоциированной с линейным узлом $X = (A; H; \varphi; E; \psi; K)$ (2), а отображение $S(\lambda)$ — передаточным оператором F (или X).

Решим задачу реализации функций типа (7), т. е. построим узлы, передаточные функции которых есть функции вида (7). Пусть $\dim E = 1$ и a — орт пространства E. Тогда узел X можно записать в виде

$$X=(A;\ H;\ p;\ q;\ k),$$

где $$q=\psi a,\quad \varphi h=(h,p)a\quad (q,\ p\in H).$$

Рассмотрим следующие узлы:

1. $$X_0=(Ah=\bar{\zeta}h;\ H=C_1;\ p,\ q=2\,\mathrm{Im}\,\zeta;\ k=1)\quad (\mathrm{Im}\,\zeta>0) \tag{9}$$

2. $$X_1=(A;\ H=C_1\oplus C_1;\ p=-i\sqrt{\mathrm{Im}\,\zeta}\,(1,1);\ q=\bar{p};\ k=1) \tag{10}$$

где A в пространстве H задается соотношением $A(x_1,x_2)=\tilde{A}(x_1,x_2)$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\bar{\zeta} & 0\\ i\,\mathrm{Im}\,\zeta & \zeta\end{pmatrix}.$$

3. $$X_k(\zeta)=(A;\ H;\ p;\ q;\ k)\qquad (k=1,2,\ldots,p) \tag{11}$$

где $H=L_2(F;\ 0,2\,\mathrm{Im}\,\zeta)$ — пространство вектор-функций $f(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\mathrm{Im}\,\zeta)$ со значениями в k — мерном комплексном пространстве F, а

$$(Af)(x)=\bar{\zeta}f(x)+i\int_0^x(f(t),p)_F\,q\,dt\qquad (f\in H,\ 0<x<2\,\mathrm{Im}\,\zeta)$$

$$p=\frac{2}{k}(2i\,\mathrm{Im}\,\zeta)^{\frac{k-1}{2}}(1,0,\ldots,0);\ q=\frac{k}{2}\bar{p};\ k=1\quad p,q\in H)$$

4. $$L_k(\zeta)=(A;\ H;\ p;\ q;\ k)\qquad \left(k=1,2,\ldots,\left[\frac{p}{2}\right]\right) \tag{12}$$

где $H=L_2(F;\ 0,\mathrm{Im}\,\zeta)$, $F-(2k-\delta_p)$ — мерное комплексное пространство

$$(Af)(x)=\mathrm{Re}\,\zeta f(x)+i\int_0^x(f(t),p)_F\,dt$$

а p,q элементы пространства F (фиксированные элементы H) такие, что

$$(q,p)_F=-\frac{2}{2k-\delta_p}(-i\,\mathrm{Im}\,\zeta)^{2k-1-\delta_p}\qquad \left(\delta_p=\frac{1+(-1)^p}{2}\right)$$

Справедлива

Теорема 3. *Функция $a_p(\lambda,\zeta)$ (6) имеет реализацию вида*

$$X(\zeta)=X_0(\zeta)VX_1(\zeta)V\ldots VX_p(\zeta)VL_1(\zeta)V\ldots VL_{\left[\frac{p}{2}\right]}(\zeta) \tag{15}$$

*где $X_k(\zeta)$ $(k=0,1,\ldots,p)$ узлы вида (9)—(11), а $L_k(\zeta)$ $\left(k=1,2,\ldots,\left[\frac{p}{2}\right]\right)$ — узлы вида (12)**.

Используя теорему о сцеплении линейных узлов ([2]), можно получить реализацию бесконечного произведения $b_p(\lambda;\lambda_k)$ (7).

---

* $X_1\ V\ X_2$ означает сцепление узлов X_1, X_2. По этому поводу см. ([2])

В заключение выражаю глубокую благодарность М. С. Лившицу за постоянное внимание при выполнении настоящей работы.

Институт математики Академии наук Армянской ССР

Լ. Խ. ՄԻՀՐԱՐՅԱՆ

Բլյաշկեի տիպի արտադրյալների մասին կիսահարթություններում

Ներկա աշխատանքում Մ. Մ. Ջրբաշյանի $N_\alpha(-1<\alpha<\infty)$ դասերի մի քանի հիմնական արդյունքները տարածվում են կիսահարթության դեպքի համար։ Ստացված են արտադրյալներ, որոնք հանդիսանում են բնական ընդհանրացումը Բլյաշկեի արտադրյալների։

Կիրառելով Մ. Ս. Լիվշիցի արդյունքները, աշխատանքում տրվում է նաև ստացված դասերի ռեալիզացիան անընդհատ ժամանակով սիստեմների տեսության շրջանակներում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. «Наука», М., 1966. [2] *М. С. Лившиц, А. А. Янцевич*, Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах, Харьков, ХГУ, 1971. [3] *J. D. Tamarkin*, Ann. of Math. (2) 31, 1930.