ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIII 1976 1

УДК 62—50

МАТЕМАТИКА

С. К. Шукурян

# О некоторых разрешимых случаях специальной проблемы функциональной эквивалентности $X$—$Y$— автоматов

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 14/V 1976)

$X-Y$ — автоматы с заключительным состоянием были рассмотрены в ([1,2]). Там же рассматривалась функциональная эквивалентность (ФЭ) $X-Y$ — автоматов. Вопрос классификации разрешимых случаев ФЭ $X-Y$ -- автоматов по базису операторов и элементарных условий остается открытым. В настоящей заметке рассмотрены два базиса операторов и элементарных условий, являющиеся обобщением ранее рассмотренных случаев, и показана разрешимость проблемы ФЭ в этих базисах.

Пусть $R=\{r_1, r_2, \ldots\}$ — множество переменных, $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ — множество функциональных символов, $\Pi=\{\pi_1, \pi_2, \ldots\}$ — множество предикатных символов. Оператором присваивания называется выражение $r:=\omega(r_{i_1}, \ldots, r_{i_s})$, где $r, r_{i_1}, \ldots, r_{i_s} \in R$, $\omega \in \Omega$, $s$ — арность $\omega$. Оператор присваивания $r:=\omega(r_{i_1}, \ldots, r_{i_s})$ называется невырожденным, если существует такой номер $p \in \{1, \ldots, s\}$, что $r_{i_p}=r$. Оператор присваивания называется монадическим, если арность $\omega$ равна 1. Элементарным условием называется выражение $\pi(r_{j_1}, \ldots, r_{j_t})$, где $\pi \in \Pi$, $r_{j_1}, \ldots, r_{j_t} \in R$.

Пусть $Y'$ — множество операторов присваивания, $U'$ — множество элементарных условий. Пару $(U', Y')$ назовем базисом (операторов и элементарных условий). Будем говорить, что $X-Y$ — автомат* $A$ задан в базисе $(U', Y')$, если $X=2^U$, $U \subseteq U'$, $Y \subseteq Y'$.

Пусть $R=\{r_1, \ldots, r_k\}$ — множество переменных, $\Omega$ — множество функциональных символов, $\Pi_i$ — множество предикатных символов арности $i$. Предположим также, что $Y$ — множество всех невырожденных операторов вида $r:=\omega(r)$, где $\omega \in \Omega$, $r \in R$, $U'$ — множество всех элементарных условий вида $\pi(r)$, где $\pi \in \Pi_1$, $r \in R$, $U''$ — множество всех элементарных условий вида $\pi_1(r_1, \ldots, r_k)$, где $\pi_1 \in \Pi_k$.

* Все неопределяемые здесь понятия можно найти в ([1,2,3]).

Из теоремы 10 в работе [1] следует, что проблема ФЭ в классе $X-Y$ — автоматов, заданных в базисе $(U'', Y)$, алгоритмически разрешима, а в работе [3] показано, что проблема ФЭ в классе $X-Y$ — автоматов, заданных в базисе $(U', Y)$, сводится к проблеме эквивалентности $k$-ленточных автоматов.

Теорема 1. *Проблема ФЭ в классе* $\mathfrak{M}$ $X-Y$ — *автоматов, заданных в базисе* $(U' \cup U'', Y)$, *сводится к проблеме эквивалентности* $k$-*ленточных автоматов.*

Отсюда ввиду результата [4] получаем, что проблема ФЭ разрешима в классе $X-Y$ — автоматов, заданных в базисе $(U' \cup U'', Y)$, если число переменных $k$ равно 2.

Через $G_Y$ обозначим подполугруппу полугруппы $G$ всех эндоморфизмов свободной универсальной $\Omega$—алгебры термов $T_R$, порожденную эндоморфизмами, соответствующими символам алфавита $Y$. В [2] доказано, что, если $A_1$, $A_2$ — $X-Y$ — автоматы, то $A_1 \text{ФЭ} A_2 \Longleftrightarrow A_1 \sim A_2(G_Y, L)$, где $L$ — множество допустимых функций отметок. Далее будет показано, что проблема $(G_Y, L)$—эквивалентности $X-Y$ — автоматов сводится к проблеме эквивалентности $k$-ленточных автоматов.

Пусть $y_l = r_l := \omega(r_l)$ $(l = 1, \ldots, k)$, а $g_{y_l}$ — элемент $Y$ — полугруппы $G_Y$, соответствующий оператору $y_l$. В работе [1] сформулирована следующая

Лемма 1. *В полугруппе* $G_Y$ *нет никаких соотношений кроме соотношений вида* $g_{y_l} \cdot g_{y_s} = g_{y_s} \cdot g_{y_l}$, *где* $s, l \in \{1, \ldots, k\}$.

Пусть $A$, $A_1$, $A_2$ — $X-Y$ — автоматы из $\mathfrak{M}$.

Следствие 1.1. *Если* $A_1 \text{ФЭ} A_2$, *то для всякой переменной* $r_l (l = 1, \ldots, k)$ *и всякой допустимой функции отметок* $\mu$ *такой, что автоматы* $A_1$ *и* $A_2$ *применимы к автомату* $G_{Y_\mu}$, *последовательности выполненных операторов* $y$ *автоматов* $A_1$ *и* $A_2$, *которые изменяют значение переменной* $r_l$, *должны совпадать.*

Следствие 1.2. *Не существует моментов времени* $\tau_1$ *и* $\tau_2$ *таких, что при работе автомата* $A$ *с* $G_{Y_\mu}$ *автомат* $G_{Y_\mu}$ *в моменты* $\tau_1$ *и* $\tau_2$ *попадает в одно и то же состояние* $g$.

Пусть заданы $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$. Покажем, что по заданным $A_1$ и $A_2$ можно построить $k$ -ленточные автоматы $\xi(A_1)$ и $\xi(A_2)$ такие, что $A_1 \sim A_2(G_Y, L) \Longleftrightarrow \xi(A_1) \sim \xi(A_2)$.

Для наглядности изложения рассмотрим случай, когда $k = 2$, множество $\Pi_1$ состоит из одного элемента $\pi$, множество $\Pi_2$—из двух элементов $\pi_1$ и $\pi_2$, $Y = \{r_l := \omega(r_l) \mid l = 1, 2\}$, $U' \cup U'' = \{\pi(r_1), \pi(r_2), \pi_1(r_1, r_2), \pi_2(r_1, r_2)\}$.

Пусть $A$ — $X-Y$ — автомат. Путь $P = a_1 \xrightarrow{x_1/y_1} \cdots \xrightarrow{x_{n-1}/y_{n-1}} a_n$ в графе переходов автомата $A$ называется допустимым, если существует такая функция отметок $\mu \in L$, что автомат $A$, работая с $G_{Y_\mu}$, с некоторого момента последовательно попадает в состояния $a_1, \ldots, a_n$, считывая при этом символы $x_1, \cdots x_{n-1}$ из $X$.

Л е м м а 2. *Всякий $X-Y$ — автомат $A \in \mathfrak{M}$ можно преобразовать в ФЭ ему $X-Y$ — автомат $A' \in \mathfrak{M}$, у которого все пути допустимы.*

Далее будем рассматривать только $X-Y$ — автоматы, у которых все пути допустимы.

Пусть $A$ — $X-Y$ — автомат, $a$ — состояние автомата $A$, $x=(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$, $x'=(\beta_1, \beta_2, \gamma_1', \gamma_2')$ принадлежат $X$, причем $\beta_l$ — значение условия $\pi(r_l)$ $(l=1, 2)$, а $\gamma_j$ и $\gamma_j'$ — значения условия $\pi_j(r_1, r_2)$ $(j=1, 2)$. Тройку $(a, x, x')$ назовем $u$-ветвлением* в автомате $A$, если $ax \neq ax'$ или $\lambda(a, x) \neq \lambda(a, x')$. Пусть $\overline{A}=\{a_1, \cdot \cdot \cdot, a_m\}$ — множество всех $u$-ветвлений в автомате $A$. Число элементов множества $\overline{A}$ назовем рангом автомата $A$.

Пусть $a_p$ — $u$ — ветвление в автомате $A$ $(p=1, \cdot \cdot \cdot, m)$. $u$-ветвление $a_p$ называется существенным, если существуют две такие допустимые функции отметок $\mu$ и $\mu'$, такие, что $\mu(r_1, r_2)=(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$, $\mu'(r_1, r_2)=(\beta_1, \beta_2, \gamma_1', \gamma_2')$, $\gamma_1 \neq \gamma_1'$ или $\gamma_2 \neq \gamma_2'$ и $u_{A(a_p)}(\mu) \neq u_{A(a_p)}(\mu')$. (Напомним, что $A(a)$ — это подавтомат автомата $A$, порожденный состоянием $a$. В качестве заключительного состояния подавтомата $A(a)$ нужно взять заключительное состояние автомата $A$).

Рассмотрим следующие преобразования графа переходов автомата $A$ (рис. 1).

Здесь $\beta_l$ — значение условия $\pi(r_l)$, $\gamma_j$ и $\gamma_j'$ — значения условия $\pi_j(r_1, r_2)$, $x=(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$, $x'=(\beta_1, \beta_2, \gamma_1', \gamma_2')$, $x \vee x'=(\beta_1, \beta_2, \gamma_1 \vee \gamma_1', \gamma_2 \vee \gamma_2')$, $a'$, $a''$ — состояния автомата $A$.

Автомат, полученный из автомата $A$ в результате применения преобразования $i)$ $(i=1, 2)$ к $u$-ветвлению $a_p$, будем обозначать $A_p^{(i)}$, а состояние в автомате $A_p^{(i)}$, соответствующее $u$ — ветвлению $a_p$ — через $a_p^{(i)}$.

Л е м м а 3. *Пусть $a_p$ — $u$ — ветвление, $a'$, $a''$ — состояния автомата (см. рис. 1). Тогда имеет место следующее:*

1) $A_p^{(1)}(a_p^{(1)})$ФЭ$A(a_p^{(2)}) \Rightarrow A_p^{(i)}$ФЭ$A(i=1, 2)$;

2) $A_p^{(1)}(a_p^{(1)})\overline{\text{ФЭ}}A_p^{(2)}(a_p^{(2)}) \Rightarrow a_p$ *— существенное $u$ — ветвление в автомате $A$.*

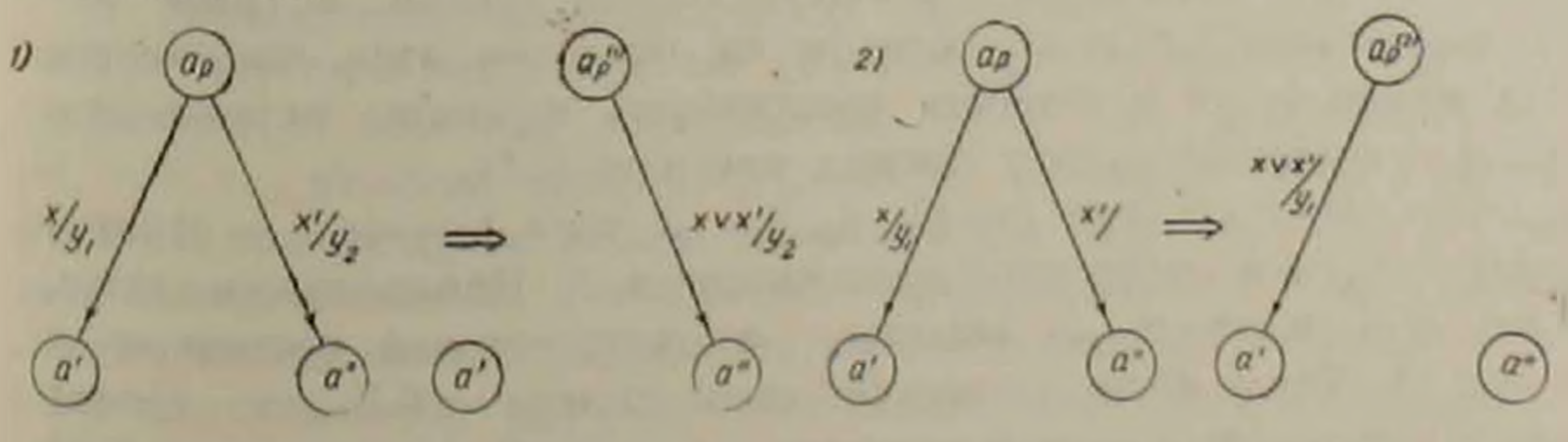


Рис. 1

* Заметим, что определение $u$-ветвления отличается от определения ветвления А. А. Летичевским в ([2]), где ветвление определяется следующим образом. Тройка $(a, x_1, x_2)$, где $a$ — состояние автомата $A$, $x_1, x_2 \in X$ называется ветвлением, если $ax_1 \neq ax_2$ или $\lambda(a, x_1) \neq \lambda(a, x_2)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы об устранении ветвлений в $X-Y$ — автоматах в работе ([2]).

Из леммы 3 следует, что проверка существенности $u$ — ветвления в автомате $A$ сводится к проверке ФЭ автоматов $A_p^{(1)}(a_p^{(1)})$ и $A_p^{(2)}(a_p^{(2)})$, ранг которых на единицу меньше ранга исходного автомата $A$. Как указывалось выше, проблема ФЭ в классе $Y-X$ — автоматов, заданных в базисе $(U', Y)$, сводится к проблеме эквивалентности $k$ — ленточных автоматов. Отсюда следует, что проверка существенности $u$ — ветвления сводится к проблеме эквивалентности $k$ — ленточных (в данном случае, поскольку $k=2$, двуленточных) автоматов. В предположении, что проблема эквивалентности в классе многоленточных автоматов алгоритмически разрешима (а для двуленточных автоматов она разрешима ([4])), получаем, что проблема ФЭ дискретных преобразователей, заданных в базисе $(U' \cup U'', Y)$, сводится к проблеме ФЭ дискретных преобразователей в этом базисе, в которых все $u$ — ветвления существенны.

Лемма 4 *Проблема ФЭ для класса $X-Y$ — автоматов, заданных в базисе $(U' \cup U'', Y)$ и содержащих только существенные $u$ — ветвления, при $k=2$ алгоритмически разрешима.*

1. Построение по $X-Y$ — автомату $A$ двуленточного автомата $\xi(A)$, моделирующего работу автомата $A$.

2. Доказательство следующего утверждения:

Если $A_1$, $A_2$ — $X-Y$ — автоматы, то $A_1 \sim A_2(G_1, L) \Longleftrightarrow \xi(A_1) \sim \sim \xi(A_2)$. Отсюда ввиду результата Берда ([4]) следует, что лемма 4 имеет место.

1. Построение моделирующего автомата $\xi(A)$.

Пусть $A$ — $X-Y$ — автомат, в котором все $u$ — ветвления существенны. Будем называть одну из лент моделирующего автомота $\xi(A)$ лентой $r_1$, а другую—лентой $r_2$. Каждой паре $x/y$ отметок дуг в графе переходов автомата будет соответствовать некоторый конечный фрагмент автомата $\xi(A)$, моделирующий вычисление входного набора условий $x$ и выполнение оператора $y$. Связь между этими фрагментами автомата $\xi(A)$ (переходы от одного фрагмента к другому) такая же, как между соответствующими дугами в графе переходов автомата $A$. Таким образом из описания этих фрагментов всегда можно будет в точности восстановить функцию переходов и выходов и функцию выбора головки автомата $\xi(A)$.

Пусть пара $x/y$, где $x=(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$, $y=r_e := \omega(r_e)$ — отметка некоторой дуги в графе переходов автомата $A$. Предположим также, что эта дуга выходит из вершины, соответствующей состоянию $a$ автомата $A$. Тогда если существует такой символ $x' \in X$, что тройка $(a, x, x')$ является $u$ — ветвлением в автомате $A$, то автомат $\xi(A)$ должен считать с ленты $r_e$ последовательность $\gamma_1 \gamma_2 \beta_e^*$ и сдвинуться по ленте $r_e$ на одну ячейку вправо, а затем считать на ленте $r_s (s \neq \neq l, s \in \{1, 2\})$ последовательность $\gamma_1 \gamma_2$ и сдвинуться по ленте $r_s$ на одну ячейку вправо. Если же такого символа $x'$ не существует, то автомат $\xi(A)$ должен считать с ленты $r_e$ последовательность $\beta_e^*$ и сдвинуться по ленте $r_e$ на одну ячейку вправо.

Во всех остальных случаях автомат $\xi(A)$ попадает в „мертвое" состояние, т. е. состояние, из которого не достижимо заключительное.

Фрагмент моделирующего автомата $\xi(A)$, соответствующий заключительному состоянию автомата $A$, проверяет наличие на каждой из лент $r_1, r_2$ последовательности $**$, означающей конец работы автомата $A$. В случае успеха автомат $\xi(A)$ попадает в заключительное состояние, в противном случае—в „мертвое".

Покажем теперь, что имеет место следующее:

2. Если $A_1, A_2 - X - Y$ —автоматы, у которых все $u$ —ветвления существенны, то $A_1 \sim A_2(G_Y, L) \prec = \succ \xi(A_1) \sim \xi(A_2)$.

($\prec =$). Доказательство очевидно.

($= \succ$). Идея доказательства заключается в следующем. Пусть автомат $A_1$ применим к $G_{Y_\mu}$ и пусть он, работая с $G_{Y_\mu}$, в некоторый момент $\tau$ переходит в состояние $a^{(1)}$, а автомат $G_{Y_\mu}$ — в состояние $g$, $\mu(g) = x$. Предположим также, что существует элемент $x' \in x$ такой, что $(a^{(1)}, x, x')$ — $u$ — ветвление. Тогда, если $A_1 \sim A_2(G_Y, L)$, то автомат $A_2$, работая с $G_{Y_\mu}$, в момент $\tau$ переходит в некоторое состояние $a^{(2)}$, а автомат $G_{Y_\mu}$ — в состояние $g$, причем тройка $(a^{(2)}, x, x')$ является $u$ — ветвлением.

Лемма 4 завершает доказательство теоремы 1.

Второй рассматриваемый базис определяется следующим: $Y' = Y \cup \{r_1 := \vartheta_e / l = 1, \ldots, u\}$, где $\vartheta_e$ — символы констант, $U''' = U' \setminus \{\pi(r_t)/t = 2, \ldots, k\}$.

Теорема 2.* *Проблема ФЭ в классе $X - Y$ — автоматов, заданных в базисе* ($U'''$, $Y$), *алгоритмически разрешима.*

Доказательство теоремы опирается на два следующих утверждения.

1. Сводимость проблемы ФЭ $X - Y$—автоматов, заданных в базисе ($U'''$, $Y'$), к проблеме эквивалентности взвешенных двусторонних автоматов.

2. Алгоритмическая разрешимость проблемы эквивалентности взвешенных двусторонних автоматов (Взвешенные двусторонние автоматы отличаются от обычных двусторонних автоматов, рассмотренных в ([5]), тем, что каждому состоянию приписан некоторый набор линейных функций, причем длина набора одинакова для всех состояний). С каждым словом состояний $p$ взвешенного двустороннего автомата можно связать набор, каждая компонента которого является суммой соответствующих компонент наборов, приписанных состояниям, входящим в слово $p$ (вес слова состояний $p$). Два взвешенных двусторонних автомата называются эквивалентными, если множества допускаемых вход-

* Подробное доказательство теоремы 2 будет опубликовано в журнале «Кибернетика».

ных слов у них совпадают и для каждого допустимого слова q веса слов состояний, соответствующих слову q, у этих автоматов равны. С использованием «техники следов» ([6]), развитой в теории сложности алгоритмов, можно показать, что проблема эквивалентности взвешенных двусторонних автоматов алгоритмически разрешима.

В заключение автор выражает благодарность научному руководителю А. А. Летичевскому за постановку задачи и внимание к работе.

Объединенная лаборатория ВЦ
АН Армянской ССР и ЕрНИИММ

Ս. Կ. ՇՈՒՔՈՒՐՅԱՆ

## $X - Y$-ավտոմատների ֆունկցիոնալ էկվիվալենտության հատուկ պրոբլեմի որոշ լուծելի դեպքեր

*Դիտարկվում են եզրափակիչ վիճակով $X - Y$-ավտոմատների դասակարգման հարցերը՝ ըստ այդ դասերում ֆունկցիոնալ էկվիվալենտության խնդրի ալգորիթմիկ լուծելիության։*

*Եզրափակիչ վիճակով $X - Y$-ավտոմատը տրված է էլեմենտար պայմանների և օպերատորների $(U', Y')$ բազիսում, եթե $X = 2^U$, $U \subseteq U'$, $Y \subseteq Y'$։ Հոդվածում դիտարկված են երկու բազիսներ, որոնք հանդիսանում են արդեն ուսումնասիրված որոշ բազիսների ընդհանրացում։ Առաջին բազիսի համար ապացուցված է, որ այդ բազիսում տրված $X - Y$-ավտոմատների ֆունկցիոնալ էկվիվալենտության խնդիրը բերվում է $k$-ժապավենանոց ավտոմատների էկվիվալենտության խնդրին։ Երկրորդ բազիսի համար ապացուցված է, որ այդ բազիսում տրված $X - Y$-ավտոմատների ֆունկցիոնալ էկվիվալենտության խնդիրը ալգորիթմիկ լուծելի է։*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Летичевский.* Функциональная эквивалентность дискретных преобразователей. II, журн. «Кибернетика», Киев, № 2, 1970. [2] *В. М. Глушков, А. А. Летичевский.* Теория дискретных преобразователей, кн. «Избранные вопросы алгебры и логики», изд «Наука», Новосибирск, 1973. [3] *Д. Лакхем, Д. М. Парк, М. С. Патерсон.* О формализованных машинных программах. «Кибернетический сборник», вып. 12, изд. «Мир», М., 1975. [4] *M. Bird.* The Equivalence Problem for Deterministic Two-Tape Automata, Journal of Computer and System Sciences, 7, 2, 1973. [5] *М. О Габин, Д. Скотт.* Конечные автоматы и задачи их разрешения. «Кибернетический сборник», вып 4, изд «Мир», М. (1962). [6] *Б. А. Трахтенброт.* Сложность алгоритмов и вычислений, изд. Новосибирского университета, Новосибирск, 1973.