ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIII 1976 1

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Л. А. Галстян

Аналитические j- растягивающие матрицы-функции и проблема Фейера

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 5/V 1976)

Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n$ постоянные матрицы m-го порядка.

Обозначим через B_ρ класс голоморфных в единичном круге матриц-функций $w(\zeta)$ порядка m, удовлетворяющих условию

$$\|w\|_\infty = \sup_{|\zeta|<1} \|w(\zeta)\| \leqslant \rho^1 \quad (1)$$

и имеющих тейлоровое разложение

$$w(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_n\zeta^n + \cdots \quad (2)$$

Задача об описании класса B_ρ составляет предмет проблемы Шура ([1]).

Проблема же Фейера ([2]) состоит в следующем:

Среди всех решений проблемы Шура найти те, у которых sup-норма $\|w\|_\infty$ минимальна. Как известно, в скалярном случае эта задача имеет единственное решение в виде конечного произведения Бляшке, умноженного на некоторое постоянное. В матричном аспекте проблема Фейера вообще говоря неопределенна.

Описанию всех решений этой проблемы и посвящается настоящая статья.

2) Рассмотрим ассоциированную с данной проблемой матрицу

$$L = L_n = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Класс B_ρ непуст тогда и только тогда, когда выполняется условие*

[1] Под нормой $\|A\|$ матрицы A всюду здесь подразумевается положительный квадратный корень максимального собственного значения матрицы A^*A.

$$\rho^2 I - LL^* \geqslant 0, \qquad (3)$$

причем для любой матрицы-функции $w(\zeta) \in B$, *верно неравенство*

$$\| w \|_\infty \geqslant \| L \| .$$

Беря в (3) $\rho = \| L \|$ *и сравнивая с* (1), *получаем: совокупность решений проблемы Фейера совпадает с классом* $B_{|L|}$.

3) Ниже дается описание класса $B_{|L|}$ с помощью основного матричного неравенства, аналогичного тому, что приводится в работе [4]. Оно также, как и в [4] выводится из матричного неравенства Шварца—Пика [3], путем разумного предельного перехода.

Теорема 2. *Класс* $B_{|L|}$ *есть совокупность голоморфных в единичном круге матриц-функций* $w(\zeta)$, *удовлетворяющих неравенству*

$$(\mathrm{I}) \qquad \left[\begin{array}{c|c} A_n (= \| L_n \|^2 I - L_n L_n^*) & \begin{array}{c} \frac{1}{\zeta} [w(\zeta) - a_0] \\ - \; - \; - \; - \; - \\ - \; - \; - \; - \; - \\ \frac{1}{\zeta^{n+1}} [w(\zeta) - (a_0 + \ldots + a_n \zeta^n)] \end{array} \\ * & \dfrac{\| L \|^2 I - w^*(\zeta) w(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{array}\right] \geqslant 0.$$

Решение матричного неравенства (I) усложняется тем, что его информационный блок $A_n = \| L_n \|^2 I - L_n L_n^*$ вырождается. Это исключает возможность применения упрощенного варианта леммы о неотрицательной блок-матрице [3], непосредственно приводящего к построению элементарного j-растягивающего $\left(j = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)$ кратного множителя полного ранга, с помощью которого записывается общее решение поставленной проблемы.

В связи с этим удобнее применить пошаговый метод решения проблемы, в процессе которого удается последовательно отщеплять особенности[1], вызывающие вырождение информационного блока A_n[2].

4) Идея отщепления этих особенностей, принадлежащая И. В. Ковалишиной, заключается в следующем:

Пусть первые k главных диагональных миноров A_i ($i=0, 1, \ldots$ $\ldots, k-1$) информационного блока A_n строго положительны, в то время как $\det A_k (= \| L_n \|^2 I - L_k L_k^*) = 0$.

Положим, для простоты записи, $\| L_n \| = 1$.

Выполнив первые k шагов стандартного пошагового процесса (что возможно ввиду невырожденности матриц $A_0, A_1, \cdot \cdot \cdot A_{k-1}$), приходим к результату:

---

[1] Т. е. унитарные части матрицы L_n.

[2] При вырождении информационного блока стандартный процесс пошагового решения невыполним.

общее решение $w(\zeta)$ неравенства (I) представляется в виде суперпозиции дробно-линейных преобразований:

$$w(\zeta)=b_0(\zeta)[b_1(\zeta)[\cdot\cdot\cdot[b_{k-1}(\zeta)[\omega_{k-1}(\zeta)]]\cdot\cdot\cdot]^1, \tag{4}$$

параметром в которой служит произвольная нерастягивающая матрица-функция $\omega_{k-1}(\zeta)$, имеющая разложение вида

$$\omega_{k-1}(\zeta)=a_0^k+a_1^k\zeta+\cdot\cdot\cdot+a_{n-k}^k\zeta^{n-k}+\cdot\cdot\cdot \tag{5}$$

Матрицы-функции $b_i(\zeta)$ $(i=0,1,\cdot\cdot\cdot,k-1)$ являются элементарными j—растягивающими двучленными множителями полного ранга с „параметризацией"

$$b_i(\zeta)=I+(1-\zeta)\begin{vmatrix} I \\ a_0^{i*}\end{vmatrix}(I-a_0^ia_0^{i*})^{-1}[I,\ a_0^i]\,j\quad(i=0,\ 1,\cdot\cdot\cdot,\ k-1)$$

где $a_0=a_0^0,\ a_0^1,\cdot\cdot\cdot,\ a_0^{k-1}$—параметры Шура.

Из-за вырождения матрицы $A_k=I-L_kL_k^*$, что в свою очередь влечет вырождение матрицы $I—a_0^ka_0^{k*}$, процесс стандартного пошагового решения здесь прерывается.

Чтобы продвинуться дальше, поступаем следующим образом: унитарными матрицами u и v, преобразуем a_0^k к виду

$$ua_0^kv=\begin{vmatrix}\alpha_0^k & 0\\ 0 & I\end{vmatrix},$$

где α_0^k—матрица порядка $r(<m)$, удовлетворяющая неравенству

$$I-\alpha_0^k\alpha_0^{k*}>0. \tag{6}$$

Оказывается, тем же преобразованием, к такому же виду приводится и матрица-функция $\omega_{k-1}(\zeta)$

$$u\omega_{k-1}(\zeta)v=\begin{bmatrix}\tilde\omega_{k-1}(\zeta) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_0^k+\alpha_1^k\zeta+\cdot\cdot\cdot & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}$$

(последнее легко вывести из неравенства Шварца-Пика).

Теперь, для описания класса нерастягивающих голоморфных матриц-функций $\tilde\omega_{k-1}(\zeta)$ порядка r, с заданными $n-k+1$ предписанными коэффициентами разложения

$$\tilde\omega_{k-1}(\zeta)=\alpha_0^k+\alpha_1^k\zeta+\cdot\cdot\cdot+\alpha_{n-k}^k\zeta^{n-k}+\cdot\cdot\cdot, \tag{7}$$

вводим j_r —растягивающий $\left(j_r=\begin{vmatrix}-I_r & 0\\ 0 & I_r\end{vmatrix}\right)$ двучленный множитель полного ранга

---

[1] По поводу такой записи см. например ([4]).

$$\bar b_k(\zeta)=I+(1-\zeta)\begin{bmatrix} I \\ \alpha_0^{k*}\end{bmatrix}(I-\alpha_0^k\alpha_0^{k*})^{-1}[I,\ \alpha_0^k]j_r=\begin{bmatrix}\bar a^k(\zeta) & \bar b^k(\zeta)\\ \bar c^k(\zeta) & \bar d^k(\zeta)\end{bmatrix},$$

возможность построения которого обеспечивается условием (6).

Дробно-линейное преобразование

$$\bar\omega_{k-1}(\zeta)=\bar b_k(\zeta)[\bar\omega_k(\zeta)],$$

с произвольным нерастягивающим голоморфным параметром $\omega_k(\zeta)$, определяет общий вид нерастягивающих голоморфных матриц-функций $\bar\omega_{k-1}(\zeta)$, имеющих разложение

$$\bar\omega_{k-1}(\zeta)=\alpha_0^k+\cdot\ \cdot\ \cdot$$

Для того, чтобы $\bar\omega_{k-1}(\zeta)$ имела разложение (7), необходимо и достаточно, чтобы параметр $\bar\omega_k(\zeta)$ имел разложение

$$\bar\omega_k(\zeta)=\alpha_0^{k+1}+\alpha_1^{k+1}\zeta+\cdot\ \cdot\ \cdot+\alpha_{n-k-1}^{k+1}\zeta^{n-k-1}+\cdot\ \cdot\ \cdot, \tag{8}$$

где коэффициенты $\alpha_0^{k+1},\cdot\ \cdot\ \cdot,\ \alpha_{n-k-1}^{k+1}$ вполне определяются по матрицам $\alpha_0^k,\ \alpha_1^k,\cdot\ \cdot\ \cdot,\ \alpha_{n-k}^k$.

Для составления суперпозиции дробно-линейных преобразований введем матрицу-функцию

$$b_k(\zeta)=U^*\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}\bar a^k(\zeta) & 0\\ 0 & I\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\bar b^k(\zeta) & 0\\ 0 & I\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}\bar c^k(\zeta) & 0\\ 0 & I\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\bar d^k(\zeta) & 0\\ 0 & I\end{vmatrix}\end{bmatrix},$$

где положено

$$U^*=\begin{vmatrix}u & 0\\ 0 & u^*\end{vmatrix},\qquad \bar b_k(\zeta)=\begin{bmatrix}\bar a^k(\zeta) & \bar b^k(\zeta)\\ \bar c^k(\zeta) & \bar d^k(\zeta)\end{bmatrix},$$

а единичные матрицы имеют порядок $m-r$.

Подставляя выражение

$$\omega_{k-1}(\zeta)=b_k(\zeta)\left\{\begin{bmatrix}\bar\omega_k(\zeta) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\right\}$$

в (4) легко находим:

общее решение $w(\zeta)$ неравенства (1) представляется в виде суперпозиции дробно-линейных преобразований

$$w(\zeta)=b_0(\zeta)\left\{\cdot\ \cdot\ \cdot\left\{b_{k-1}(\zeta)\left\{b_k(\zeta)\begin{bmatrix}\bar\omega_k(\zeta) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\right\}\right\}\cdot\ \cdot\ \cdot\right\}.$$

с произвольным параметром $\bar\omega_k(\zeta)$ порядка r, имеющим разложение (8).

Очевидно такая процедура пошагового решения продолжаема. Она приведет либо к сокращению размерности параметра до определенного предела, либо к полному его исчезновению. В последнем случае задача Фейера будет иметь единственное решение в виде конечного произведения Бляшке—Потапова элементарных нерастягивающих двучленных множителей. (Задача поставлена В. П. Потаповым).

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Լ. Հ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ

Անալիտիկ j-ձգող մատրից-ֆունկցիաներ և Ֆեյերի պրոբլեմը

Հոդվածում դիտարկվում է Ֆեյերի էքստրեմալ պրոբլեմը մատրիցային գրվածքով՝ անալիտիկ j-ձգող մատրից-ֆունկցիաների տեսության լույսի տակ։

Պրոբլեմի լուծումը բերում է կոտորակա-գծային ձևափոխության,

$$w(\zeta) = b_0(\zeta)\left\{ b_1(\zeta)\left\{ \cdot \cdot \cdot \left\{ b_n(\zeta)\left\{ \begin{vmatrix} \omega(\zeta) & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \right\}\right\}\right\} \cdot \cdot \cdot \right\},$$

որի գործակիցների մատրիցը հանդիսանում է j-ձգող, ոչ անպայման լրիվ ռանգի տարրական երկանդամ արտադրիչների արտադրյալ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *I. Schur*, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises beschränkt sind (Journ. f. Math., 147, 148). [2] *Carathéodory–Fejér*, Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard–Lendanschen Satz (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 32 (1911). S. 218—239. [3] *А. В. Ефимов, В. П. Потапов*, УМН, т. XXVIII, вып. 1/169 (1973). [4] *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов*, ДАН Арм. ССР, т. LIX, № 1 (1974).