ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 1

УДК 519.4

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

Решетка конгруэнций алгебр второй ступени

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 2/IV 1976)

Под алгеброй второй ступени мы понимаем объект $<Q; \Sigma; G>$, где Σ—некоторая совокупность финитарных операций определенных на множестве Q, а G—некоторая совокупность финитарных операций определенных на множестве Σ. Это понятие введено в работе ([1]), в связи с исследованием некоторых формул из языка второй ступени.

В настоящей работе исследуется решетка конгруэнций алгебр второй ступени. Аналогичное исследование для алгебр первой ступени (т. е. для обычных алгебр) было проведено в работе Гретцера и Шмидта ([2]).

1. Точная нижняя (верхняя) грань совокупности $\{a_i\}_{i\in J}$ частично-упорядоченного множества обозначается обычным путем $\bigcap\limits_{i\in J} a_i$ (соответственно $\bigcup\limits_{i\in J} a_i$). Теоретико-множественное пересечение (объединение) совокупности $\{X_i\}_{i\in J}$ обозначается через $\bigwedge\limits_{i\in J} X_i$ (соответственно $\bigvee\limits_{i\in J} X_i$).

Элемент $a\in Q$ частично-упорядоченного множества $Q(\leqslant)$ называется компактным, если из соотношения $a\leqslant\bigcup\limits_{i\in J} a_i$ следует $a\leqslant\bigcup\limits_{i\in I} a_i$ для некоторого конечного подмножества $I\subseteq J$. Иначе говоря, если элемент a содержится в бесконечном объединении, то он содержится и в конечном объединении.

Частично-упорядоченное множество называется компактно-порожденным, если каждый его элемент есть объединение компактных элементов:

$$a=\bigcup_{i\in J} x_i,$$

где все x_i — компактны.

Пусть Q — произвольное множество и $B(Q)$—его булеан, т. е. множество всех его подмножеств. Подмножество $M\subseteq B(Q)$ назовем предсистемой замыканий множества Q, если оно замкнуто при произвольном пересечении непустого семейства множеств. Если предсистема замыканий M замкнута и при пересечении пустого семейства множеств, т. е., если $Q \in M$, то мы приходим к понятию системы замыканий в смысле ([3]).

Понятно, что каждая предсистема замыканий является полной полурешеткой относительно теоретико-множественного включения. Причем здесь, как и в дальнейшем все полурешетки—нижние.

Предсистема замыканий называется алгебраической, если она содержит теоретико-множественное объединение каждого своего направленного подмножества. В силу предложения 1.5.9 книги ([3]), вместо направленных подмножеств здесь можно ограничиваться цепями.

Пусть M—некоторая предсистема замыканий множества Q. Подмножество $X \subseteq Q$ называется M-максимальным, если не существует такого $Y \in M$, что $X \subseteq Y$.

Определим отображение $\Phi : B(Q) \to B(Q)$ следующим путем:

$$\Phi(X) = \bigwedge \{ Y \in M \mid Y \supseteq X \},$$

если X не является M-максимальным и $\Phi(X) = Q$ для M-максимальных подмножеств $X \subseteq Q$.

Отображение Φ является оператором замыкания, т. е. справедливы следующие соотношения:

а) если $X \subseteq Y$, то $\Phi(X) \subseteq \Phi(Y)$,

б) $X \subseteq \Phi(X)$,

в) $\Phi\Phi(X) = \Phi(X)$.

Нетрудно заметить, что если для семейства $\{Q_i\}_{i \in J}$, где $Q_i \in M$, существует точная верхняя грань $\bigcup\limits_{i \in J} Q_i$, то

$$\bigcup_{i \in J} Q_i = \Phi(\bigvee_{i \in J} Q_i).$$

Теорема 1. *Каждая алгебраическая предсистема замыканий является компактно-порожденной полурешеткой.*

Из теоремы 1 вытекает следующий результат.

Следствие. *Каждая алгебраическая система замыканий является* компактно-порожденной решеткой.

Справедливость теоремы 1 вытекает из следующих лемм.

Лемма. 1. *Пусть M—алгебраическая предсистема замыканий множества Q. Если $X \subseteq Q$ не является M-максимальным, то*

$$\Phi(X) = \bigvee \Phi(Y),$$

где $Y \subseteq X$ и Y—конечно.

Доказательство. Обозначим правую часть доказываемого равенства через $\overline{X}$. Если $x \in X$, то $x \in \{x\} \subseteq \Phi(\{x\})$ и следовательно $X \subseteq \overline{X}$. Совокупность $\{\Phi(Y)\}$, где $Y \subseteq X$ и Y—конечно, является направленной, поскольку:

$$\Phi(Y_1),\ \Phi(Y_2) \subseteq \Phi(Y_1 \bigvee Y_2) \in M.$$

В силу алгебраичности рассматриваемой предсистемы замыканий заключаем, что $\overline{X}\in M$.
Одновременно, из соотношения $Y\subseteq X$ следует $\Phi(Y)\subseteq\Phi(X)$ и потому

$$\bigvee\Phi(Y)\subseteq\Phi(X).$$

т. е. $\overline{X}\subseteq\Phi(X)$. Остается, теперь использовать определение $\Phi(X)$.

Лемма 2. *Пусть M—алгебраическая предсистема замыканий и $S\in M$. Тогда S является компактным, если и только если $S=\Phi(X)$, для некоторого конечного подмножества $X\subseteq S$.*

Доказательство. Пусть $S=\Phi(X)$ для некоторого конечного $X=\{x_1, \ldots, x_n\}\subseteq S$ и $S\subseteq\bigcup\limits_{i\in J}Q_i$, $Q_i\in M$. Тогда из соотношения $x_j\in X\subseteq\Phi(X)=S\subseteq\bigcup\limits_{i\in J}Q_i=\Phi(\bigvee\limits_{i\in J}Q_i)$ заключаем (в силу леммы 1), что $x_j\in\Phi(H_j)$, где $H_j\subseteq\bigvee\limits_{i\in J}Q_i$ и H_j является конечным. Одновременно, существует конечное $I_j\subseteq J$ такое, что $H_j\subseteq\bigvee\limits_{i\in I_j}Q_i$. Положим $I=\bigvee\limits_{1\leq j\leq n}I_j$.
Тогда $X\subseteq\Phi(\bigvee\limits_{i\in I}Q_i)$ и

$$S=\Phi(X)\subseteq\Phi\Phi(\bigvee_{i\in I}Q_i)=\Phi(\bigvee_{i\in I}Q_i)=\bigcup_{i\in I}Q_i.$$

Таким образом S оказывается компактным.

Предположим теперь, что $S\in M$ компактно. В силу леммы 1 имеем:

$$S=\Phi(S)=\bigvee\Phi(Y)=\bigcup\Phi(Y),$$

где $Y\subseteq S$ и Y—конечно. В силу компактности S отсюда следует равенство:

$$S=\Phi(Y_1)\cup\cdots\cup\Phi(Y_k),$$

где $Y_1,\cdots, Y_k$ являются конечными подмножествами S.

Предполагая $Y=Y_1\vee\cdots\vee Y_k$ получаем:

$$S=\Phi(Y),$$

где Y—конечное подмножество S.

2. Перейдем к изучению конгруэнций алгебр второй ступени.

Пусть $D=\langle Q; \Sigma; G\rangle$—алгебра второй ступени, r—отношение эквивалентности определенное на множестве Q, а $\bar{t}$—отношение эквивалентности определенное на множестве Σ. Упорядоченная пара $(r, \bar{t})$ называется конгруэнцией алгебры второй ступени D, если:

а) отношение r стабильно относительно каждой операции из Σ,

б) из условия $A\,\bar{t}\,B$ следует $|A|=|B|$ и $A(x_1, \ldots, x_m)rB(x_1, \ldots, x_m)$ для любых $x_1, \ldots, x_m\in Q$, где $A, B\in\Sigma$, $|A|=m$.

в) отношение $\bar{t}$ стабильно относительно каждой операции из G.

Как известно [1], ядра гомоморфизмов алгебр второй ступени являются конгруэнциями. Однако, обратное утверждение не верно. Существуют конгруэнции алгебр второй ступени не являющимися ядрами подходящих гомоморфизмов.

Пусть $q_1=(r_1, \bar{t}_1)$ и $q_2=(r_2, \bar{t}_2)$ конгруэнции одной и той же алгебры второй ступени. Определим частичный порядок „$\leq$" следующим путем:

$$q_1 \leq q_2 \Longleftrightarrow r_1 \leq r_2 \text{ и } \bar{t}_1 \leq \bar{t}_2.$$

Таким образом, класс всех конгруэнций определенных на одной и той же алгебре второй ступени является частично-упорядоченным множеством.

Лемма 3. *Если $q_i=(r_i, \bar{t}_i)$, $i \in J$ есть некоторая совокупность конгруэнций алгебры второй ступени, то*

$$\bigwedge_{i \in J} q_i = (\bigwedge_{i \in J} r_i, \bigwedge_{i \in J} \bar{t}_i)$$

является конгруэнцией.

Доказательство очевидно.

В лемме 3 мы использовали обозначения теоретико-множественных объединений и пересечений поскольку, отношение r есть подмножество множества $Q \times Q$, отношение $\bar{t}$ есть подмножество множества $\Sigma \times \Sigma$, а пару $q=(r, \bar{t})$ можно рассматривать как подмножество множества $(Q \times Q) \times (\Sigma \times \Sigma)$.

Лемма 4. *Если $q_i=(r_i, \bar{t}_i)$, $i \in J$ есть направленная совокупность конгруэнций одной и той же алгебры второй ступени, то*

$$\bigvee_{i \in J} q_i = (\bigvee_{i \in J} r_i, \bigvee_{i \in J} \bar{t}_i)$$

является конгруэнцией.

Доказательство. Проверим, например, условие а) определения конгруэнции. Если $(x_1, x_1') \in \bigvee_{i \in J} r_i, \ldots, (x_n, x_n') \in \bigvee_{i \in J} r_i$, то существуют $r_1, \ldots, r_n \in \{r_i\}_{i \in J}$, такие, что $x_1 r_1 x_1' \ldots, x_n r_n x_n'$. Поскольку совокупность $\{q_i\}_{i \in J}$ направлена, то направленным будет и совокупность $\{r_i\}_{i \in J}$, т. е. существует отношение $r \in \{r_i\}_{i \in J}$ такое что, $r_1, \ldots, r_n \leq r$. Таким образом $x_1 r x_1, \ldots, x_n r x_n'$ и для любого $A \in \Sigma\ (|A| = n)$ выполняется $A(x_1, \ldots, x_n)\, r\, A(x_1', \ldots, x_n')$ и $(A(x_1, \ldots, x_n), A(x_1', \ldots, x_n')) \in \bigvee_{i \in J} r_i$. Мы доказали, что отношение $\bigvee_{i \in J} r_i$ стабильно относительно каждой операции из множества Σ алгебры второй ступени $\langle Q; \Sigma; G \rangle$. Аналогичным путем проверяются и другие условия определения конгруэнции.

Теорема 2. *Класс всех конгруэнций одной и той же алгебры второй ступени образует полную решетку.*

Доказательство. Пусть $D=\langle Q; \Sigma; G\rangle$ есть произвольная алгебра второй ступени и $q_i=(r_i, \bar{t}_i)$, $i\in J$—некоторая совокупность ее конгруэнций. Из леммы 3 следует, что точной нижней гранью совокупности $\{q_i\}_{i\in J}$ служит $\bigwedge\limits_{i\in J} q_i$. Убедимся, что точной верхней гранью совокупности $\{q_i\}_{i\in J}$ является пара $(\bigcup\limits_{i\in J} r_i, \bigcup\limits_{i\in J} \bar{t}_i)$, где $\bigcup\limits_{i\in J} r_i$—точная верхняя грань совокупности $\{r_i\}_{i\in J}$ в решетке всех эквивалентностей множества Q, а $\bigcup\limits_{i\in J} \bar{t}_i$ является точной верхней гранью совокупности $\{\bar{t}_i\}_{i\in J}$ в решетке всех эквивалентностей множества Σ. Установим например выполнимость условия б) определения конгруэнции для пары $(\bigcup\limits_{i\in J} r_i, \bigcup\limits_{i\in J} \bar{t}_i)$. Пусть $(A, B)\in \bigcup\limits_{i\in J} \bar{t}_i$, т. е. существуют операции $A_1, \ldots, A_n\in\Sigma$ и отношения $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n\in\{\bar{t}_i\}_{i\in J}$ такие, что

$$A\bar{t}_1A_1\bar{t}_2A_2\cdots\bar{t}_n A_n=B.$$

Из последнего соотношения следует $|A|=|A_1|=\cdots=|A_n|=|B|$ и если $|A|=n$, то

$$A(x_1, \ldots, x_n)\, r_1A_1(x_1, \ldots, x_n)\, r_2 \ldots r_n A_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Таким образом $(A(x_1, \ldots, x_n),\ B(x_1, \ldots, x_n))$ и $\bigcup\limits_{i\in J} r_i$.

Аналогично проверяются и остальные условия определения конгруэнции.

Из леммы 3 вытекает, что класс всех конгруэнций одной и той же алгебры второй ступени $\langle Q; \Sigma; G\rangle$ является предсистемой замыканий множества $(Q\times Q)\times(\Sigma\times\Sigma)$. Из леммы 4 следует, что эта предсистема замыканий является алгебраической, а из теоремы 1 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Полная решетка конгруэнций каждой алгебры второй ступени является компактно-порожденной.*

Пусть

$$K_D=\{(r_i, t_j)\mid i\in I,\ j\in J\}$$

есть класс всех конгруэнций алгебры второй ступени $D=\langle Q;\Sigma;G;\rangle$. Совокупности

$$K_Q=\{r_i\mid i\in I\}$$

и

$$K_\Sigma=\{t_j\mid j\in J\}$$

соответственно называются первой и второй проекцией решетки конгруэнций алгебры второй ступени D.

Нетрудно заметить, что первая и вторая проекция решетки конгруэнции являются полными решетками. Точнее справедливо следующее утверждение, содержащееся в доказательстве предыдущей теоремы.

П р е д л о ж е н и е. *Первая (вторая) проекция решетки конгруэнций алгебры второй ступени* $<Q; \Sigma; G>$ *является подрешеткой в решетке всех эквивалентностей множества* Q *(соответственно множества* Σ*).*

Т е о р е м а 4. *Первая проекция решетки конгруэнций алгебры второй ступени является полной компактно-порожденной решеткой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая проекция K_Q является алгебраической предсистемой замыканий множества Q. Остается сослаться на теорему 1.

Справедливо и двойственное утверждение.

Т е о р е м а 5. *Вторая проекция решетки конгруэнций алгебры второй ступени является полной компактно-порожденной решеткой.*

Следующие утверждения дают новые представления полных компактно-порожденных решеток.

Т е о р е м а 6. *Каждая полная компактно-порожденная решетка изоморфна первой проекции решетки конгруэнций некоторой алгебры второй ступени.*

Т е о р е м а 7. *Каждая полная компактно-порожденная решетка изоморфно второй проекции решетки конгруэнции некоторой алгебры второй ступени.*

Доказательство теорем 6, 7 проводится по методу работы ([2]).

С л е д с т в и е. *Каждая полная компактно-порожденная решетка вкладывается в решетке конгруэнций некоторой алгебры второй ступени.*

Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Երկրորդ աստիճանի հանրահաշիվների կոնգրուենցիաների ստրուկտուրան

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է երկրորդ աստիճանի հանրահաշիվների կոնգրուենցիաների ստրուկտուրան և նրա պրոյեկցիաները։ Ինչպես կոնգրուենցիաների ստրուկտուրան, այնպես էլ նրա առաջին և երկրորդ պրոյեկցիաները, պարզվում է, հանդիսանում են այսպես կոչված կոմպակտային տիպի։

Այդ փաստերն ապացուցելու համար հոդվածում նախապես մտցվում է փակության ենթասիստեմի գաղափարը և ցույց է տրվում մի բավարար պայման փակության ենթասիստեմի կոմպակտային լինելու համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. М. Мовсисян*, Матем. исслед. АН МССР, IX, 1 (31), 70—82, 1974. [2] *G. Grätzer, E. T. Schmidt*, Acta scient. math., 24, № 1—2, 34—59 (1963). [3] *П. Кон*, Универсальная алгебра, „Мир“, 1968.