

УДК 517.11+518.5

МАТЕМАТИКА

О. С. Асатрян

О ретрактах нумерованного множества Клини

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 13/II 1976)

В работе рассмотрены некоторые свойства ретрактов нумерованного множества всех частично рекурсивных функций (ч. р. ф.) Клини — K . Дано полное описание всех конечных ретрактов $K^{(1)}$.

Определим две о. р. ф. $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ так:

$$\varphi_{\alpha(x,y)}(z) = \begin{cases} \varphi_x(z) \vee \varphi_y(z) & \text{в зависимости от того какой раньше вы-} \\ & \text{числится} \\ & \text{не определена в противном случае,} \end{cases}$$

$$\varphi_{\beta(x,y)}(z) = \begin{cases} \varphi_x(z) & \text{если } \varphi_y(z) \text{ — определена \& } \varphi_x(z) = \varphi_y(z) \\ & \text{не определена в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим: $\varphi_x \cup \varphi_y = \varphi_{\alpha(x,y)}$,

$$\varphi_x \cap \varphi_y = \varphi_{\beta(x,y)}.$$

Заметим, что $\varphi_x \cap \varphi_y$ — точная нижняя грань функций φ_x и φ_y в K .

Если φ_x и φ_y — совместны, то $\varphi_x \cup \varphi_y$ точная верхняя грань φ_x и φ_y в K .

Если φ_x и φ_y не совместны, то у φ_x и φ_y вообще нет верхней грани в K . Отметим свойства введенных операций.

Свойство 1) если φ_x и φ_y совместны, то выполнены неравенства:

$$\varphi_{\beta(x,y)} \leq \varphi_x \leq \varphi_{\alpha(x,y)}$$

$$\varphi_{\beta(x,y)} \leq \varphi_y \leq \varphi_{\alpha(x,y)}$$

Свойство 2) Если $\varphi_x \leq \varphi_y$, то φ_x и φ_y совместны.

Известно, что всякий морфизм $(^2)$ $\mu: K \rightarrow K$ задает монотонное и непрерывное отображение $(^3)$. Легко убедиться, что μ сохраняет совместность ч. р. ф.

Теорема 1. Если $\sigma = \{\varphi_{\mu(x)}\}_{x \in N}$ ретракт K $(^2)$, то

1) σ нижняя полурешетка.

2) всякая совместная пара ч. р. ф. φ_x и φ_y из σ имеет наименьшую верхнюю грань.

Доказательство. 1) Пусть $\varphi_x, \varphi_y \in \sigma$ тогда $\varphi_{p(x)} = \varphi_x, \varphi_{p(y)} = \varphi_y$, имеем:

$$\varphi_{\beta(p(x), p(y))} \leq \varphi_{p(x)}$$

$$\varphi_{\beta(p(x), p(y))} \leq \varphi_{p(y)}$$

$$\varphi_{\beta(p(x), p(y))} \leq \varphi_{pp(x)} = \varphi_{p(x)}$$

$$\varphi_{\beta(p(x), p(y))} \leq \varphi_{pp(y)} = \varphi_{p(y)},$$

$\varphi_{\beta(p(x), p(y))}$ — наибольшая нижняя грань, действительно, если

$$\varphi_{p(z)} \geq \varphi_{\beta(p(x), p(y))} \text{ \& } \varphi_{p(z)} \leq \varphi_{p(x)} \text{ \& } \varphi_{p(z)} \leq \varphi_{p(y)}$$

для некоторого z , то

$$\varphi_{p(z)} \leq \varphi_{\beta(p(x), p(y))} \Rightarrow \varphi_{pp(z)} = \varphi_{p(z)} \leq \varphi_{\beta(p(x), p(y))},$$

значит:

$$\varphi_{p(z)} = \varphi_{\beta(p(x), p(y))}$$

2) Пусть $\varphi_{p(x)}, \varphi_{p(y)} \in \sigma$ и совместны, тогда

$$\varphi_{p(x)} \leq \varphi_{\alpha(p(x), p(y))}$$

$$\varphi_{p(y)} \leq \varphi_{\alpha(p(x), p(y))},$$

поэтому,

$$\varphi_{pp(x)} = \varphi_{p(x)} \leq \varphi_{\alpha(p(x), p(y))}$$

$$\varphi_{pp(y)} = \varphi_{p(y)} \leq \varphi_{\alpha(p(x), p(y))}.$$

Предположим, что для некоторого z

$$\varphi_{p(z)} \geq \varphi_{p(x)} \text{ \& } \varphi_{p(z)} \geq \varphi_{p(y)} \text{ \& } \varphi_{p(z)} \leq \varphi_{\alpha(p(x), p(y))}$$

тогда $\varphi_{p(z)} \geq \varphi_{\beta(p(x), p(y))}$, отсюда:

$$\varphi_{pp(z)} = \varphi_{p(z)} \geq \varphi_{\beta(p(x), p(y))},$$

значит:

$$\varphi_{p(z)} = \varphi_{\beta(p(x), p(y))}$$

Следствие 1) Всякое конечное семейство из σ имеет точную нижнюю грань

Доказательство. Очевидно.

Следствие 2) Если ретракт σ из K имеет наибольший элемент, то σ дистрибутивная решетка.

Доказательство. В ретракте с наибольшим элементом все элементы попарно совместны.

Следствие 3) Всякий ретракт $\sigma = \{\varphi_{p(x)}\}_{x \in N}$ из K имеет наименьший элемент.

Действительно $\forall x [\Phi \leq \varphi_x] \Rightarrow \forall x [p(\Phi) \leq \varphi_{p(x)}]$ (в силу монотонности p). Где Φ — нигде не определенная функция.

Следствие 4). σ — вполне перечислимый ретракт $K \Leftarrow \Rightarrow \sigma \downarrow$ — подмножество K ⁽²⁾, ⁽¹⁾.

Доказательство. Очевидно.

Определение. Вычислимое подмножество $\{\varphi_{f(x)}\}_{x \in N}$ ч. р. ф. из K назовем совместным если выполнено условие

$$\forall z \forall y [\exists x [\varphi_{f(x)}^{(y)} = z] \Rightarrow \forall u \forall v [\varphi_{f(u)}^{(y)} = v \Rightarrow v = z]]$$

Замечание. Семейство всех K — вычислимых подмножеств из K имеет универсальную нумерацию. Эта нумерация главная и полная. Такой нумерацией является произвольная универсальная ч. р. ф. для класса всех двуместных ч. р. ф. Обозначим ее через K^2 .

Лемма. Семейство всех вычислимых совместных подмножеств из K есть n — подмножество K^2 (2).

Доказательство. Пусть $K^3(z, x, y) = \varphi_{f(z, x)}^{(y)}$ универсальная функция Клини. Обозначим через $\bar{K}(z, x, y, t) = \varphi_{f(z, x)}^t(y)$, где $\varphi_{f(z, x)}^t(y) = \bigcup_{i \in N} \varphi_{f(z, x)}^i(y)$.

Определим ч. р. ф.

$$\psi(z, x, y, t) = \begin{cases} \varphi_{f(z, x)}^t(y) & \text{если } \varphi_{f(z, x)}^t(y) \text{ определена \&} \\ \forall u \leq t \forall v \leq t [\varphi_{f(z, x)}^u(y) \text{ — определена} \Rightarrow \varphi_{f(z, u)}^v(y) = \\ = \varphi_{f(z, x)}^t(y)] & \\ \text{не определена} & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (*)$$

Из построения $\psi(z, x, y, t) = \varphi_{h(z, x, t)}(y)$ видно, что при фиксированных z_0 и x_0 , $\varphi_{h(z_0, x_0, t)}^{(y)}$ вычислимая последовательность вложенных ч. р. ф. Пусть

$$\varphi_{f'}^{(y)}(z, x) = \bigcup_{i \in N} \varphi_{h(z, x, i)}(y) \quad \text{тогда:}$$

$\varphi_{f'}(z, x)(y) = K^3(w_0, z, x, t) = \varphi_{g(z)}(x, y)$ для некоторой о. р. ф. $g(z)$. Остается проверить, что $g(z)$ определяет n — подмножество K^2 . Во-первых, для всех $z \in N$ $K^3(g(z), x, y)$ — совместная вычислимая последовательность.

Если $K^3(z_0, x, y)$ — совместная вычислимая последовательность, то $K^3(g(z_0), x, y) = K^3(z_0, x, y)$.

Это легко следует из (*). Лемма доказана.

Теорема 2. Если $\sigma = \{\varphi_{p(x)}\}_{x \in N}$ ретракт K , то всякая совместная вычислимая последовательность из σ имеет точную верхнюю грань в σ .

Доказательство Пусть $\sigma(x)$ о. р. ф. из леммы. Тогда $K^3(g(x), p(y), z) = \psi(x, y, z)$ — нумерует все совместные вычислимые последовательности из σ .

Определим о. р. ф. $f(x)$ так:

$$\varphi_{f(x)}(z) = \begin{cases} v & \text{если } \exists y [\psi(x, y, z) = v] \\ \text{не определена} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из определения $f(x)$ следует, что

$$\forall x \forall y [\psi(x, y, z) \leq \varphi_{f(x)}(z)] \Rightarrow \forall x \forall y [\psi(x, p(y), z) \leq \varphi_{p(f(x))}(z)].$$

Но $\psi(x, p(y), z) = \psi(x, y, z)$, поэтому:

$$\forall x \forall y [\psi(x, y, z) \leq \varphi_{p(f(x))}(z)].$$

$\varphi_{p(f(x))}(z)$ — есть точная верхняя грань последовательности

$$\{\psi(x, y, z)\}_{y \in N}$$

для всех $x \in N$. Действительно, если это не так, то пусть для некоторых x_0 и u_0 выполнено условие:

$$\forall y [\varphi_{p(u_0)} \geq \psi(x_0, y, z) \& \varphi_{p(u_0)} \leq \varphi_{p/(x_0)}], \quad (**)$$

тогда, (в силу того, что $\varphi_{p/(x_0)}$ — точная верхняя грань для $\{\psi(x_0, y, z)\}_{y \in N}$), имеем: $\varphi_{p(u_0)} \geq \varphi_{p/(x_0)}$

Поэтому в силу монотонности p

$$\varphi_{pp(u_0)} = \varphi_{p(u_0)} \geq \varphi_{p/(x_0)}$$

вместе с (**) имеем: $\varphi_{p(u_0)} = \varphi_{p/(x_0)}$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Конечное подмножество σ из K является ретрактом K тогда и только тогда, когда σ — нижняя полурешетка относительно включения графиков и всякая совместная пара из σ имеет точную верхнюю грань в σ .

Доказательство.

Необходимость следует из теоремы (1).

Достаточность. Пусть $\sigma = \{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ и φ_0 наименьший элемент (в конечной нижней полурешетке есть такой). Выберем конечное множество чисел z_{ij}^k ($i, j \leq n, k \leq 1$)

$$z_{ij}^k = \begin{cases} \mu_z[\varphi_i(z) \neq \varphi_j(z)] & \text{если } \varphi_i, \varphi_j \text{ не совместны и } k=0 \\ \mu_z[\varphi_i(z) = \varphi_j(z)] & \text{если } \varphi_i, \varphi_j \text{ совместны и } \partial\varphi_i \cap \partial\varphi_j \neq \emptyset, \& k=0 \\ \mu_z[z \in \partial\varphi_i \& z \notin \partial\varphi_j] & \text{если } \partial\varphi_i \setminus \partial\varphi_j \neq \emptyset \& k=1, \end{cases}$$

построим конечные функции $\{x_i\}_{i \leq n} = \sigma'$ так:

$$x_i(z) = \begin{cases} \varphi_r(z_{r,j}^k) & \text{если } \varphi_r \leq \varphi_i \& [z = z_{r,j}^k] \text{ существует для } k \in [0, 1] \\ \text{не определена в противном случае} \end{cases} \quad (1)$$

Проверим следующие соотношения между элементами σ и σ' .

- а) $x_i \leq \varphi_i$
- б) x_i совместна с $x_j \iff \varphi_i$ совместна с φ_j
- в) $x_i \leq x_j \iff \varphi_i \leq \varphi_j$
- г) σ' изоморфна σ .

а) Из построения $z_{r,j}^k$ видно, что выполнено условие

$$\forall i, r, j, k [\varphi_r \leq \varphi_i \& z_{r,j}^k \in \partial\varphi_r \implies \varphi_r(z_{r,j}^k) = \varphi_i(z_{r,j}^k)]$$

поэтому $x_i \leq \varphi_i$.

б) $\implies$ Пусть x_i совместна с x_j но φ_i не совместна с φ_j и пусть $z' = z_{i,j}^0 = z_{j,i}^0 = \mu_z[\varphi_i(z) \neq \varphi_j(z)]$, тогда $x_i(z') = \varphi_i(z') \& x_j(z') = \varphi_j(z')$, но мы предположили, что $\varphi_i(z') \neq \varphi_j(z')$, тогда $x_i(z') \neq x_j(z')$ т. е. x_i и x_j не совместны. $\Leftarrow$ Любая подфункция φ_i совместна с любой подфункцией φ_j , в частности из а) x_i совместна с x_j .

в) $\implies$ Пусть $x_i \leq x_j$, но $\varphi_i \not\leq \varphi_j$.

Во-первых из б) φ_i и φ_j совместны. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\exists z' [z' = z_{i,j}^1 = \mu_z[z \in \partial\varphi_i \setminus \partial\varphi_j]]$

Тогда $x_i(z')$ определена, но $x_j(z')$ не определена.
(Если $x_j(z')$ — определена, то для некоторой подфункции $\varphi_r \leq \varphi_j$, $x_j(z') = \varphi_r(z') = \varphi_j(z')$, значит $z' \in \delta\varphi_j$, но $z' \notin \delta\varphi_j$. Противоречие). Поэтому $x_i \leq x_j$. Пришли к противоречию.

$\Leftarrow$ Пусть $\varphi_i \leq \varphi_j$, но $x_i \not\leq x_j$. Во-первых x_i, x_j совместны, поэтому, как и в случае в) $\Rightarrow$, ограничимся рассмотрением случая, когда $\exists z' [z' = z_{r',j'}^{k'}, \in \delta x_i \setminus \delta x_j]$ для некоторых r', j', k' .

Пусть $k' = 0$, тогда из (1) $x_i(z_{r',j'}^0) = \varphi_{r'}(z_{r',j'}^0)$, а это означает, что $\varphi_{r'} \leq \varphi_i$, но $\varphi_i \leq \varphi_j$, поэтому $\varphi_{r'} \leq \varphi_j$, тогда и для x_j выполнено условие из (1) для тех же r' и j' , поэтому $x_j(z')$ определена и $x_j(z') = \varphi_{r'}(z') = x_i(z')$, а это означает что $z' \in \delta x_j$ — противоречие.

Аналогично рассуждая при $k' = 1$ опять приходим к противоречию. Значит $\varphi_i \leq \varphi_j \Rightarrow x_i \leq x_j$.

г) Из свойств а), б), в) очевидным образом следует, что отображение g определенное: $g(x_i) = \varphi_i$ — изоморфизм σ' и σ относительно порядка.

Построим теперь функцию ретракции для ε . Пусть φ'_t конечная подфункция φ_x построенная к шагу t .

Положим $\varphi'_{p(x)} = \sup(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})$,

если $\sup(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \leq \varphi'_x$.

Легко проверить, что $p(x)$ функция ретракции для ε .

Теорема доказана.

Следствие. Если φ_e максимальный элемент ε такой, что $\varphi_e = \sup\{\varphi_i, \varphi_j\} \& \varphi_i \neq \varphi_e \neq \varphi_j$, то $\sigma \setminus \varphi_e$ и — подмножество K , но не ретракт. Легко доказать.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского Государственного университета

2. Ս. ԱՍԱՏՐՅԱՆ

Կլիների համարակալված բազմությունների մասին

Աշխատանքում դիտարկվում են բոլոր մասնակի ռեկուրսիվ ֆունկցիաների
Կլիների համարակալված բազմության ռեկուրսիվ ընդհանուր հատկու-
թյունները: Տրվում է վերջավոր ռեկուրսիվ լրիվ նկարագրությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ И. А. Лавров, Алгебра и Логика, 13, № 6, 1974. ² Ю. Л. Ершов, Теория нумераций I. ИГУ, Новосибирск, 1969. ³ Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, изд. «Мир», М., 1972. ⁴ Ю. Л. Ершов, Теория нумераций II. ИГУ, Новосибирск, 1972.