ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 5

УДК 519.4

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

Сверхтождества ассоциативности в системах полугрупп

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 30/V 1976)

Под сверхтождеством ассоциативности мы понимаем абсолютно замкнутую формулу второй ступени [1] следующего вида:

$$\forall X, Y, Z, U \forall x, y, z\, (X[Y(x, y), z] = Z[x, U(y, z)]).$$

Грубо говоря сверхтождества это тождества с переменными операциями.

В настоящей работе исследуется выполнимость сверхтождества ассоциативности в системах полугрупп. При этом универсальную алгебру $\langle Q; \Sigma \rangle$ будем называть системой полугрупп, если для любого $A \in \Sigma$ группоид $Q(A)$ является бинарной полугруппой с единицей (полагаем, что порядок $\Sigma > 1$). Алгебра $\langle Q; \Sigma \rangle$ называется системой групп (квазигрупп), если для любого $A \in \Sigma$ группоид $Q(A)$ есть бинарная группа (квазигруппа). Понятно, что каждая система групп одновременно является как системой полугрупп, так и системой квазигрупп.

Выполнимость сверхтождеств ассоциативности в системах квазигрупп была рассмотрена в работе [2]. Однако, полученные там результаты, относительно сверхтождеств ассоциативности, по существу вытекают из результатов настоящей работы, так как, если в системе квазигрупп $\langle Q; \Sigma \rangle$ выполняется сверхтождество ассоциативности, то алгебра $\langle Q; \Sigma \rangle$ автоматически оказывается системой групп, следовательно и системой полугрупп.

Сверхтождество, в котором участвует только один символ операции, назовем тривиальным. В противном случае, сверхтождество называется нетривиальным.

В дальнейшем приставки во всех формулах (т. е. во всех сверхтождествах ассоциативности) опускаем,—имеется в виду, что все символы операции и все предметные переменные находятся под действием квантора всеобщности.

Теорема. *Если в системе полугрупп $\langle Q; \Sigma \rangle$ выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности, то оно может быть одним из следующих видов:*

$$X[Y(x, y), z] = Y[x, X(y, z)] \qquad (1)$$

$$X[Y(x, y), z] = X[x, Y(y, z)] \qquad (2)$$

$$X[X(x, y), z] = Y[x, Y(y, z)] \qquad (3)$$

Доказательство. Если некоторый символ операции в сверхтождестве ассоциативности

$$X[Y(x, y), z] = U[x, V(y, z)]$$

встречается всего один раз, то оказывается, что такое сверхтождество не может выполняться в некоторой системе полугрупп. Предположим например, что символ операции X в рассматриваемом сверхтождестве встречается всего один раз и что это сверхтождество выполняется в некоторой системе полугрупп $<Q; \Sigma>$.

Пусть $A, B \in \Sigma$ и $A \neq B$, тогда

$$A[A(x, y), z] = A[x, A(y, z)]$$

и

$$B[A(x, y), z] = A[x, A(y, z)].$$

Таким образом

$$A[A(x, y), z] = B[A(x, y), z].$$

Если e — единичный элемент полугруппы $Q(A)$, то при $y = e$ из последнего равенства следует

$$A(x, z) = B(x, z),$$

т. е. $A = B$, что противоречит выбору операций $A, B \in \Sigma$.

Аналогично показываются, что если сверхтождество ассоциативности выполняется в некоторой системе полугрупп, то символы операций Y, Z и U также не могут встречаться всего один раз. Следовательно, если сверхтождество ассоциативности выполняется в некоторой системе полугрупп ,то каждый символ операций в нем должен появляться в точности два раза, т. е. такое сверхтождество должно быть либо вида (1), либо вида (2), либо вида (3).

Следствие. *Если в системе групп $<Q; \Sigma>$ выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности, то оно может быть одного из видов (1)—(3).*

Далее мы описываем те системы полугрупп, в которых выполняются сверхтождества (1)—(3).

Теорема 1. *В системе полугрупп $<Q; \Sigma>$ выполняется сверхтождество (1), если и только если существует полугруппа $Q(\cdot)$ такая, что для любого $A_i \in \Sigma$ всегда*

$$A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y,$$

где $t_i \in Q$.

Доказательство. Достаточность показывается простой проверкой. Докажем необходимость. Если $(\cdot)$ и $(\circ)$ — произвольные полугруппы из множества Σ и $X = (\cdot)$, $Y = (\circ)$, то справедливо равенство

$$(x \circ y) \cdot z = x \circ (y \cdot z).$$

Пусть e—единичный элемент полугруппы $Q(\cdot)$, тогда при $y=e$ получим

$$(x\circ e)\cdot z=x\circ z$$

или

$$\lambda x\cdot z=x\circ z,$$

где отображение λ определяется по правилу $x\to x\circ e$.

Аналогичным путем показывается, что

$$x\cdot z=\mu x\circ z$$

для любых $x, z\in Q$ и для некоторого отображения $\mu: Q\to Q$. Сравнивая последние два равенства получим:

$$x\circ z=(\mu\lambda)x\circ z$$

$$x\cdot z=(\lambda\mu)x\cdot z.$$

Из последних двух равенств, когда z есть единичный элемент соответственно полугрупп $Q(\circ)$ и $Q(\cdot)$, следует

$$\mu\lambda=\varepsilon,\quad \lambda\mu=\varepsilon,$$

где ε—тождественное отображение множества Q. Иначе говоря, отображение λ—биекция множества Q.

Таким образом, существует полугруппа $Q(\cdot)$ такая, что для любой операции $A_i\in\Sigma$ выполняется равенство

$$A_i(x, y)=\lambda_i x\cdot y,$$

где λ_i — биекция множества Q. Определим отображение λ_i с помощью операции $(\cdot)$.

Выполнимость формулы (6) в системе полугрупп теперь означает:

$$\lambda_i(\lambda_j x\cdot y)\cdot z=\lambda_j x\cdot\lambda_i y\cdot z$$

откуда при $z=e$, получим:

$$\lambda_i(\lambda_j x\cdot y)=\lambda_j x\cdot\lambda_i y.$$

Однако, поскольку λ_j — биекция, то $\lambda_j x=u$ есть произвольный элемент множества Q и

$$\lambda_i(u\cdot y)=u\cdot\lambda_i y.$$

Из последнего равенства, при $y=e$ следует

$$\lambda_i u=u\cdot t_i,$$

где $t_i=\lambda_i e$. Таким образом справедливо равенство

$$A_i(x,\ y)=x\cdot t_i\cdot y.$$

Следствие 1. *В системе групп $\langle Q;\Sigma\rangle$ выполняется сверхтождество* (1), *если и только если существует группа* $Q(\cdot)$ *такая, что для любого* $A_i\in\Sigma$ *справедливо равенство*

$$A_i(x, y)=x\cdot t_i\cdot y,$$

где $t_i\in Q$.

Доказательство. Достаточно показать, что полугруппа $Q(\cdot)$ из предыдущей теоремы здесь на самом деле является группой. В доказательстве предыдущей теоремы было установлено, что отображение $\lambda_i: x \to x \cdot t_i$ есть биекция, поэтому равенство

$$A_i(x, y) = \lambda_i x \cdot y$$

показывает, что полугруппа $Q(\cdot)$ и группа $Q(A_i)$ изотопны. В силу теоремы Брака-Хъюза ([3]) в таком случае, они будут и изоморфны.

Теорема 2. *В системе полугрупп* $<Q; \Sigma>$ *выполняется сверхтождество* (2) *если и только если существует полугруппа* $Q(\cdot)$ *такая, что для любого* $A_i \in \Sigma$ *справедливо равенство*

$$A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y,$$

где t_i *— элемент из центра полугруппы* $Q(\cdot)$.

Доказательство. Достаточность показывается непосредственной проверкой. При доказательстве необходимости, рассуждая как и выше, находим

$$A_i(x, y) = x \cdot \lambda_i y.$$

Далее показывается, что отображение λ_i имеет вид

$$\lambda_i y = t_i \cdot y$$

и является биекцией. Таким образом,

$$A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y.$$

Из выполнимости сверхтождества (2) в системе полугрупп $<Q; \Sigma>$ следует (при $X = (\cdot)$, $Y = A_i$) равенство

$$x \cdot t_i \cdot y \cdot z = x \cdot y \cdot t_i \cdot z.$$

Откуда при $x = z = e$, где e — единичный элемент полугруппы $Q(\cdot)$, получим

$$t_i \cdot y = y \cdot t_i$$

т. е. элемент t_i лежит в центре полугруппы $Q(\cdot)$.

Следствие 2. *В системе групп* $<Q; \Sigma>$ *выполняется сверхтождество* (2), *если и только если, существует группа* $Q(\cdot)$ *такая, что для любого* $A_i \in \Sigma$ *справедливо равенство*

$$A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y,$$

где t_i *— элемент из центра группы* $Q(\cdot)$.

Доказательство. См. доказательство следствия 1.

Теорема 3. *В системе полугрупп* $<Q; \Sigma>$ *выполняется сверхтождество* (3), *если и только если, существует полугруппа* $Q(\cdot)$ *с единицей такая, что для любого* $A_i \in \Sigma$ *справедливо равенство*

$$A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y,$$

где t_i *— элемент второго порядка из центра полугруппы* $Q(\cdot)$.

Доказательство. Полагая в равенстве (3) $X=(\cdot)$ и $Y=A_i$, где операции $(\cdot)$ и A_i берутся из множества $\sum$, мы получаем

$$x\cdot y\cdot z=A_i[x,\ A_i(y,\ z)].$$

Откуда, при $y=t_i$, где t_i — единичный элемент полугруппы $Q(A_i)$, следует равенство

$$A_i(x,\ z)=x\cdot t_i\cdot z.$$

Из выполнимости сверхтождества (3) в системе полугрупп $\langle Q;\ \Sigma\rangle$ теперь вытекает

$$x\cdot y\cdot z=x\cdot t_i\cdot y\cdot t_i\cdot z.$$

Если $x=y=z=e$, где e — единичный элемент полугруппы $Q(\cdot)$, то

$$e=t_i^2,$$

а если $x=z=e$, то

$$y=t_i\cdot y\cdot t_i$$

или

$$t_i\cdot y=y\cdot t_i,$$

т. е. элемент t_i лежит в центре полугруппы $Q(\cdot)$ и имеет порядок два.

Достаточность доказывается непосредственной проверкой.

Следствие 3. *В системе групп* $\langle Q;\ \Sigma\rangle$ *выполняется сверхтождество* (3), *если и только если, существует группа* $Q(\cdot)$ *такая, что для любого* $A_i\in\sum$ *справедливо равенство*

$$A_i(x,\ y)=x\cdot t_i\cdot y,$$

где t_i *— элемент второго порядка из центра группы* $Q(\cdot)$.

Доказательство. См. доказательство следствия 1.

Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ասոցիատիվության գերնույնությունները կիսախմբային համակարգերում

Գերնույնությունները հանդիսանում են փոփոխական գործողություններով նույնություններ։ Ճշգրիտ սահմանումը տանք մեր հետաքրքրող դեպքի համար։ Ասոցիատիվության գերնույնություն ասելով հասկանում են հետևյալ տիպի երկրորդ աստիճանի բանաձևը՝

$$\forall X,\ Y,\ Z,\ U\ \forall x,\ y,\ z(X[Y(x,\ y),\ z]=Z[x,\ U(y,\ z)]).$$

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է ասոցիատիվության գերնույնությունների իրացնելիությունը կիսախմբային համակարգերում։ Ընդ որում $\langle Q;\Sigma\rangle$ *ունիվերսալ հանրահաշիվը մենք անվանում ենք կիսախմբային համակարգ, եթե ցանկացած* $A\in\sum$ *գործողության համար* $Q(A)$ *խմբոյիդը հանդիսանում է միավորով օժտված կիսախումբ։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. И. Мальцев*, Алгебраические системы, «Наука», 1970. [2] *В. Д. Белоусов*, УМН, 20, 1(121), 75—145, (1965). [3] *А. Г. Курош*, Общая алгебра, «Наука», 1974.