УДК 917.5

МАТЕМАТИКА

К. Г. Валеев, И. Р. Карганян

О приведении канонической системы линейных
 дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 24/V 1976)

В ряде работ К. А. Бреуса (1-3) указан способ построения канонической замены переменных для приведения канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Здесь указываются достаточные условия существования этой замены и дается новый способ ее построения, связанный с методом усреднения. В качестве приложения рассмотрен вопрос о построении границы областей неустойчивости решений уравнения второго порядка.

1. Рассматривается каноническая система дифференциальных уравнений порядка $2n$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = JH(t)Z(t), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}, \quad H(t + 2\pi) \equiv H(t), \quad (1)$$

где $H(t)$ — симметрическая (или эрмитова), 2π — периодическая по t матрица порядка $2n$. E_n — единичная матрица порядка n .

Найдем фундаментальную матрицу решений $U(t)$, нормированную в точке $t=0$ из матричного интегрального уравнения

$$U(t) = E_{2n} + \int_0^t JH(\tau)U(\tau)d\tau. \quad (2)$$

Метод последовательных приближений позволяет найти $U(t)$ на конечном интервале с любой степенью точности. С помощью неравенства Гронуолла — Беллмана (4) получим оценку

$$\|U(2\pi) - E_{2n}\| \leq \exp \left(\int_0^{2\pi} \|H(\tau)\| d\tau \right) - 1. \quad (3)$$

Здесь $\|A\|$ — норма матрицы A . Дальше предполагаем везде, что

$$\|E_{2n}\| = 1, \quad \|J\| = 1.$$

Ищем представление $U(t)$ в форме Флоке:

$$U(t) = \Phi(t)e^{Pt}, \quad \Phi(t+2\pi) \equiv \Phi(t). \quad (4)$$

Для показательной матрицы P имеем разложение

$$P = \frac{1}{2\pi} \ln U(2\pi) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [E_{2n} - U(2\pi)]^k. \quad (5)$$

Из оценки (3) следует то, что матричный ряд (5) сходится при условии

$$\int_0^{2\pi} \|H(\tau)\| d\tau < \ln 2. \quad (6)$$

Этот вывод общеизвестен также, как и способ построения показательной матрицы P с помощью ряда (5) (5,6). Дадим новое доказательство результата К. А. Бреуса того, что система дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dt} = JDY, \quad JD \equiv P \quad (7)$$

является канонической. Это доказывает каноничность, приводящей к (7), замены

$$Z = \Phi(t)Y. \quad (8)$$

Матрица $U(t)$ является симплектической матрицей, т. е. удовлетворяет, легко проверяемое дифференцированием, тождеству

$$U^*(t)JU(t) = J.$$

Звездочкой обозначается переход к сопряженной матрице. В частности, из этого тождества имеем равенство

$$(E_{2n} - U^*(2\pi))J = J(E_{2n} - U^{-1}(2\pi)). \quad (9)$$

Сравним два матричных ряда:

$$D^* = P^*J = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [E_{2n} - U^*(2\pi)]^k J,$$

$$D = -JP = J \frac{1}{2\pi} \ln U^{-1}(2\pi) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J [E_{2n} - U^{-1}(2\pi)]^k.$$

В силу равенства (9) найдем то, что $D = D^*$, т. е. система (7) будет канонической. Это доказательство является более общим и простым, чем известное ранее доказательство К. А. Бреуса.

2. При построении матрицы $U(t)$ из (2) возникают вычислительные трудности, которые упрощаются при следующем способе отыскания замены (8). А именно, ищем замену (8) вида

$$Z = (E + S(t))Y, \quad S(0) = 0, \quad S(t+2\pi) \equiv S(t). \quad (10)$$

Дифференцируя эту замену и исключая вектор Z , приходим к матричному уравнению для периодической матрицы $S(t)$

$$\frac{dS(t)}{dt} = JH(t)(E + S(t)) - (E + S(t))JD. \quad (11)$$

Покажем, что при выполнении некоторых условий постоянную матрицу D можно выбрать так, чтобы матрица $S(t)$ была 2π -периодической. Для операторов осреднения и интегрирования с осреднением и аннулированием при $t=0$ используем следующие обозначения:

$$\langle H(t) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\tau) d\tau, \quad (12)$$

$$LH(t) \equiv |H(t)| \equiv \int_0^{2\pi} |H(\tau) - \langle H(\tau) \rangle| d\tau.$$

Представим матрицу $H(t)$ с помощью ряда Фурье

$$H(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n e^{int}, \quad H_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\tau) e^{-in\tau} d\tau \quad (n=0, \pm 1, \dots).$$

Из (12) найдем другое представление для оператора L :

$$\begin{aligned} LH(t) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} H_n (e^{int} - 1) (in)^{-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n(t-\tau)}{n} + \frac{\sin n\tau}{n} \right) H(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{s}{\pi} \right) H(t-s) ds - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{s}{\pi} \right) H(-s) ds, \end{aligned}$$

из которого находим оценку для нормы оператора L в пространстве 2π -периодических матриц с нормой

$$|H(t)| = \sup_t \|H(t)\|.$$

Имеем неравенство

$$|LH(t)| \leq |H(t)| \int_0^{2\pi} \left| 1 - \frac{s}{\pi} \right| ds = \pi |H(t)|, \quad |L| \leq \pi. \quad (13)$$

Для того, чтобы матрица $S(t)$ (11) была 2π -периодической, необходимо и достаточно, чтобы среднее значение правой части уравнения (11) равнялось нулю:

$$\langle JH(t)(E + S(t)) - (E + S(t))JD \rangle = 0.$$

То же самое условие можно записать по другому

$$D = \langle H(t) \rangle + \langle H(t)S(t) \rangle + \langle JS(t)JD \rangle. \quad (14)$$

Для $S(t)$ имеем интегральное матричное уравнение

$$S(t) = [J(H(t) - D) + JH(t)S(t) - S(t)JD]. \quad (15)$$

Для решения уравнений (14), (15) применим метод последовательных приближений (далее пропускаем аргумент t у матриц $H(t)$, $S(t)$)

$$D_{k+1} = \langle H \rangle + \langle HS_k \rangle + \langle JS_k JD_k \rangle, \quad D_0 = 0, \quad (16)$$

$$S_{k+1} = |JH + JHS_k - S_k JD_k|, \quad S_0 = 0.$$

Найдем условия, при выполнении которых последовательности матриц D_k , S_k сходятся. Сначала найдем условия ограниченности.

Пусть при некотором значении $k=0, 1, \dots$ выполнены неравенства

$$|D_k| \leq \frac{a}{\pi}, \quad |S_k| \leq b. \quad (17)$$

Из (16) находим оценки для D_{k+1} , S_{k+1} :

$$|D_{k+1}| \leq |H| + |H|b + ab\pi^{-1}, \quad |S_{k+1}| \leq \pi(|H| + |H|b + ab\pi^{-1}).$$

Отсюда следует то, что неравенства (17) будут выполнены при всех значениях $k=0, 1, \dots$, если выполняются условия

$$|H|(1+b) + ab\pi^{-1} \leq a\pi^{-1}, \quad \pi(|H|(1+b) + ab\pi^{-1}) \leq b$$

или

$$c + cb + ab \leq a, \quad c + cb + ab \leq b, \quad c \equiv \pi|H|.$$

В свою очередь эти неравенства имеют положительные решения, если квадратное уравнение относительно a ($a = b$)

$$a^2 + (c-1)a + c = 0$$

имеет положительное решение. Находим выражение для границ в неравенствах (17)

$$a = b = 0,5(1-c) - \sqrt{0,25(1-c)^2 - c}.$$

Наибольшее допустимое значение c определяется из уравнения

$$(1-c)^2 - 4c = 0, \quad c_0 = 3 - 2\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^{-1}. \quad (18)$$

Следовательно, при $0 \leq c \leq c_0$ последовательности матриц D_k , S_k будут ограничены при всех k .

Пусть теперь $0 \leq c \leq c_0$. Исследуем сходимость этих последовательностей. Из (16) находим неравенства

$$|D_{k+1} - D_k| \leq |S_k| \cdot |D_k - D_{k-1}| + (|H| + |D_k|) \cdot |S_k - S_{k-1}|,$$

$$|S_{k+1} - S_k| \leq \pi |S_{k-1}| \cdot |D_k - D_{k-1}| + \pi(|H| + |D_k|) |S_k - S_{k-1}|.$$

Если собственные числа матрицы, мажорирующих коэффициентов этих неравенств

$$A = \begin{pmatrix} b & \pi^{-1}(a+c) \\ \pi b & (a+c) \end{pmatrix}$$

по модулю не превышают единицы, то последовательности D_k , S_k

равномерно сходятся. Элементы матрицы положительны и монотонно возрастают при увеличении c . В крайнем случае $c=c_0$ матрица A принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & \pi^{-1}(2-\sqrt{2}) \\ \pi(\sqrt{2}-1) & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

и имеет собственные числа 0 и 1. Следовательно, при $0 \leq c \leq c_0$, т. е. при выполнении условия

$$\sup_t \|H(t)\| < \frac{c_0}{\pi} = \frac{1}{\pi(3+2\sqrt{2})} = 0,109226 \dots \quad (19)$$

модули собственных чисел матрицы A меньше единицы, и последовательности матриц D_k , $S_k(t)$ сходятся равномерно. А изложенный способ пригоден для отыскания канонической замены переменных (10). По существу этот метод близок методу Л. Чезари для отыскания периодических решений (7,8).

3. В последнее время в ряде работ (9-12) было указано на принципиальные затруднения, возникающие при применении метода малого параметра для построения границы областей неустойчивости. Речь шла о случае, когда коэффициенты уравнения второго порядка зависят голоморфно от нескольких малых параметров. Изложенный выше способ позволяет обойти эти затруднения.

Рассматривается уравнение Хилла

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y + \psi(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) y = 0, \quad \psi(t, 0, \dots, 0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где $\psi(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) - \pi$ — периодическая по t функция, аналитически или непрерывно зависящая от $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$, вещественная при вещественных значениях $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$.

Произведем замену переменных

$$y = q \cos nt + p \sin nt, \quad y' = -qn \sin nt + pn \cos nt.$$

Приходим к канонической системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\psi(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)}{n} (q \cos^2 nt + p \sin nt \cos nt), \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\psi(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)}{n} (q \cos nt \sin nt + p \sin^2 nt). \end{aligned} \quad (21)$$

Из условия (19) следует, что при выполнении неравенства

$$\sup_t |\psi(t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)| < 0,218452 n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

существует каноническая замена переменных, приводящая систему (21) к канонической системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которую можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)x - \beta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)y, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)x + \alpha(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)y. \quad (22)$$

В первом приближении имеем выражения

$$\alpha = \frac{1}{n} \langle \psi \cos nt \sin nt \rangle, \quad \beta = \frac{1}{n} \langle \psi \cos^2 nt \rangle, \quad \gamma = \frac{1}{n} \langle \psi \sin^2 nt \rangle.$$

Легко устанавливается, что решение системы (22) а, следовательно и уравнения (20), устойчивы при выполнении условия

$$D(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) = \beta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \gamma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) - \alpha^2(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) > 0$$

и неустойчивы при $D < 0$. Граница определяется неявным уравнением

$$D(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) = 0,$$

которое можно представить в явном виде и разрешить относительно любого параметра. В частности, для дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y + \psi(\theta t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) y = 0 \quad (23)$$

для границы всегда можно получить аналитическое представление⁽¹²⁾

$$\theta = \frac{\omega}{n} + \varphi_1(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \pm \sqrt{\varphi_2(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \varphi_2'(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (24)$$

Если $\psi(\theta t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ аналитически зависит от $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$, то и функции φ_1, φ_2 аналитически зависят от $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$. Если $\psi(\theta t, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ — функция вещественная при вещественных значениях $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$, то выражение (24) принимает вид

$$\theta = \frac{\omega}{n} + \varphi_1(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \pm |\varphi_2(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)| \quad (n=1, 2, \dots).$$

Пример. Найдем границу областей неустойчивости уравнения⁽¹¹⁾

$$\frac{d^2u}{dt^2} + [\lambda + \varepsilon_1(1 + \cos 2t) + \varepsilon_2(\cos t + 2\sin 2t)]u = 0, \quad \lambda \approx 1.$$

Используя указанный выше способ, найдем во втором приближении уравнения

$$\lambda = 1 - \varepsilon_1 - \frac{1}{32} \varepsilon_1^2 + \frac{1}{24} \varepsilon_2^2 \pm \sqrt{\varepsilon_2^2 + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_1 - \frac{1}{4} \varepsilon_2^2\right)^2}, \quad (25)$$

которые отличаются от аналогичных уравнений в (11). Правильность уравнений (25) подтверждена другими способами.

Ереванский политехнический институт

Պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների
կանոնական սխտեմի բերման մասին

Ուսումնասիրվում է պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների կանոնական սխտեմների բերման հարցը: Ներկայացվում են կանոնական փոխարինման գոյության բավարար պայմանները և միջինացման մեթոդի օգնությամբ տրվում է այդ փոխարինման կառուցման նոր միջոց: Առաջարկվող միջոցը հնարավորություն է ստեղծում ուսումնասիրել պարբերական գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների կանոնական սխտեմների լուծումների կայունության տիրույթի սահմանների կառուցման հարցը այն դեպքի համար, երբ սխտեմի գործակիցները մի քանի փոքր պարամետրերի հոլոմորֆ ֆունկցիաներ են: Գործնական կիրառման կարգով ստացվել է երկու փոքր պարամետրից կախված գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարման լուծման կայունության տիրույթի սահմանների անալիտիկ ներկայացումը երկրորդ մոտարկումով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ К. А. Бреус, Укр. мат. ж., 12, № 4, 436—466 (1960). ² К. А. Бреус, ДАН СССР т. 123, № 1, 21—24 (1958). ³ К. А. Бреус, Укр. мат. ж., 18, № 1, 3—10 (1966). ⁴ Р. Беллман, Теория устойчивости движения, Изд. ИЛ, М., 1954. ⁵ И. П. Еругин, Приводимые системы, Труды МИАН им. Стеклова, 12 (1946). ⁶ Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Изд. «Наука», М., 1970. ⁷ Дж. Хейл, Колебания в нелинейных системах, Изд. «Мир», 1966. ⁸ Л. Чезари, Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд. «Мир», 1964. ⁹ Рэмд, Об устойчивости уравнения Хилла с четырьмя независимыми параметрами, «Прикладная механика» № 4, изд. «Мир», 243, 1969. ¹⁰ Хэмер, Смит, «Прикладная механика», № 1, Изд. «Мир», 118—120, 1972. ¹¹ Рубенфельд, «Прикладная механика», № 4, 285—287, Изд. «Мир», 1973. ¹² Найфех, «Прикладная механика», № 4, 301—302, Изд. «Мир», 1972. ¹³ К. Г. Валеев, И. Р. Каргинян, Сб. «Математическая физика», Изд. АН УССР, в. 5, 26—34 (1974).