

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

В. М. Мартиросян

О замкнутости систем функций типа Миттаг-Леффлера и
систем простейших рациональных дробей

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 22/V 1976)

1°. Обозначим через $H_2[\alpha; \omega]$ $\left(\frac{1}{2} < \alpha < +\infty, -1 < \omega < 1\right)$ известный⁽¹⁾ (см. также ⁽²⁾, главу VII) класс функций $F(z)$, голоморфных в угловой области

$$\Delta(\alpha) = \{z; |\arg z| < \pi/(2\alpha), 0 < |z| < +\infty\} \quad (1)$$

и удовлетворяющих условию

$$\|F\|_{\alpha, \omega}^* = \sup_{|\varphi| < \pi/(2\alpha)} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty. \quad (2)$$

Обозначим через $L_{2, \omega}(L_\alpha)$ класс функций $F(\xi)$, измеримых на границе L_α области $\Delta(\alpha)$ и таких, что

$$\|F\|_{\alpha, \omega} = \left(\int_{L_\alpha} |F(\xi)|^2 |\xi|^\omega |d\xi| \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \quad (3)$$

Известно ⁽²⁾, что любая функция $F(z) \in H_2[\alpha; \omega]$ почти всюду на L_α имеет угловые граничные значения $F(\xi) \in L_{2, \omega}(L_\alpha)$.

Можно показать, что со скалярным произведением

$$(F, G)_{\alpha, \omega} = \int_{L_\alpha} F(\xi) \overline{G(\xi)} |\xi|^\omega |d\xi| \quad (4)$$

$H_2[\alpha; \omega]$ является гильбертовым, а с нормой (2) — банаховым пространством и $\forall F(z) \in H_2[\alpha; \omega]$

$$\|F\|_{\alpha, \omega}^* \leq \|F\|_{\alpha, \omega} = \sqrt{(F, F)_{\alpha, \omega}} \leq \sqrt{2} \|F\|_{\alpha, \omega}^*. \quad (5)$$

2°. В совместной работе ⁽¹⁾ М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна (см. также ⁽²⁾, стр. 419) для функций $F(z) \in H_2[\alpha; \omega]$ $\left(\frac{1}{2} < \alpha < +\infty, -1 < \omega < 1\right)$

$+\infty, -1 < \omega < 1$) было построено преобразование типа Бореля $G_{\rho, \mu}(\xi; F)$ ($\rho \geq \frac{\alpha}{2\alpha-1}, \mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$), которым задается ограниченный линейный оператор из $H_2[\alpha; \omega]$ в $H_2[\gamma; -\omega]$ ($\gamma^{-1} = \alpha^{-1} + \rho^{-1}$). В связи с этим устанавливается

Теорема 1. Класс $H_2[\gamma; -\omega]$ ($\frac{1}{2} < \gamma < +\infty, -1 < \omega < 1$) совпадает с классом функций, допускающих представление вида

$$f(\xi) = G_{\rho, \mu}(\xi; F), \quad \xi \in \Delta(\gamma), \quad (6)$$

где $F(z) \in H_2[\alpha; \omega]$ произвольна, $\frac{1}{2} < \alpha < +\infty, \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho}, \mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$.

При этом справедлива формула обращения

$$F(re^{i\theta}) = G_{\rho, \mu}^{-1}(re^{i\theta}; f) \equiv \frac{e^{-i\theta} r^{1-\mu\rho}}{2\pi\rho} \frac{d}{dr} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iyr\theta} - 1}{iy} \times$$

$$\times f(e^{i(-\theta + \frac{\pi}{2\rho} \operatorname{sign} y)} |y|^{\frac{1}{\rho}}) (e^{i\frac{\pi}{2\rho} \operatorname{sign} y} |y|^{\frac{1}{\rho}})^{1-\mu\rho} dy, \quad z = re^{i\theta} \in \Delta(\alpha), \quad (7)$$

и имеют место неравенства

$$\|F\|_{\alpha, \omega} \leq \sqrt{4/\sqrt{\pi}} \|f\|_{\gamma, -\omega} \leq \sqrt{32/\sqrt{\pi}} \|F\|_{\alpha, \omega}. \quad (8)$$

Отметим, что в случае $\omega = 0, \rho = 1$, но $0 < \alpha, \gamma < +\infty$ теорема 1 установлена в работе М. М. Джрбашяна и автора (2).

3°. Как хорошо известно (3), целая функция типа Миттаг—Леффлера $E_\rho(z; \mu)$ ($\rho > 0, \mu > 0$) определяется разложением

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(\mu + k\rho^{-1}).$$

В дальнейшем полагаем, что

$$\frac{1}{2} < \alpha < +\infty, \quad \rho = \frac{\alpha}{2\alpha-1}, \quad -1 < \omega < 1 \quad (9)$$

и $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(\alpha)$, а $s_k \geq 1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $|\lambda_j|_1^k$ этой последовательности.

М. М. Джрбашяном было установлено следующее предложение (4), являющееся существенным обобщением известной теоремы Мюнца—Саса.

Теорема А. Для замкнутости системы функций типа Миттаг—Леффлера

$$\omega_p^s(t; \lambda_k) = E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k t; \mu) t^{s_k-1}, \quad \mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho} \quad (1 \leq k < +\infty) \quad (10)$$

в $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1+|\lambda_k|^{2\alpha})^{-1} \operatorname{Re} \lambda_k^{\alpha} = +\infty. \quad (11)$$

Существенно опираясь на эту теорему, в силу теоремы Винера—Пэли ⁽⁵⁾ (см. также ⁽²⁾, стр. 413) и формулы (см. ⁽²⁾, стр. 149, а также ⁽⁶⁾, лемму 2)

$$\frac{(n-1)!}{(\zeta+\lambda)^n} = \rho^{\zeta\mu-1} \int_0^{+\infty} e^{-\zeta t} t^{\mu-1} E_{\rho}^{(n-1)}(-\lambda t; \mu) t^{n-1} dt (1 \leq n < +\infty), \quad (12)$$

где $\zeta \in \Delta(\rho)$, $\lambda \in \Delta(\alpha)$, устанавливается

Теорема 2. Для замкнутости системы рациональных дробей

$$r(\zeta; \lambda_k) = (s_k - 1)! (\zeta + \lambda_k)^{-s_k} (1 \leq k < +\infty) \quad (13)$$

в $H_2[\rho; \omega]$ необходимо и достаточно выполнение условия (11).

Теорема 3°. Пусть

$$\frac{\alpha}{2\alpha-1} < \rho_1 < +\infty, \quad \mu_1 = \frac{1+\omega+\rho_1}{2\rho_1}. \quad (14)$$

Для замкнутости системы функций типа Миттаг—Леффлера

$$\omega_{\rho_1}^*(z; \lambda_k) = E_{\rho_1}^{(s_k-1)}(-\lambda_k z; \mu_1) z^{s_k-1} (1 \leq k < +\infty) \quad (15)$$

в $H_2[\gamma; \omega]$, где

$$\frac{1}{\gamma} = 2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho_1} \right), \quad (16)$$

необходимо и достаточно выполнение условия (11).

4°. Пусть

$$\Delta^*(\alpha) = \{z; \pi/(2\alpha) < |\arg z| \leq \pi, \quad 0 < |z| < +\infty\}. \quad (17)$$

При условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1+|\lambda_k|^{2\alpha})^{-1} \operatorname{Re} \lambda_k^{\alpha} < +\infty \quad (18)$$

обозначим через $\lambda_2[\Delta(\rho); \lambda_k; \omega]$ класс функций $F(z)$, определенных и аналитических в $\Delta(\rho) \cup \Delta^*(\rho) \setminus \{-\lambda_k\}_1^{\infty}$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1. $F(z) \in H_2[\rho; \omega]$, $z \in \Delta(\rho)$;

2. $F(-z)B_{\alpha}(z) \in H_2[\alpha; \omega]$, $z \in \Delta(\alpha)$, где $B_{\alpha}(z)$ — сходящееся произведение типа Бляшке для угловой области $\Delta(\alpha)$ с нулями в точках $z = \lambda_k$:

* В специальном случае $\omega = 0$ теорема 2, а в специальном случае $\omega = 0$, $\rho = 1$ теорема 3 и приводимая дальше теорема 4 были установлены в совместной работе М. М. Джрбашяна и автора ⁽³⁾.

$$B_a(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z^a - \lambda_k^a}{z^a + \overline{\lambda_k^a}} \frac{|1 - \lambda_k^{2a}|}{1 - \lambda_k^{2a}};$$

3. Угловые граничные значения функции $F(z)$ слева и справа контура L_p почти всюду совпадают.

Обозначим также через $\lambda_2^{\circ}[\Delta(\rho); \lambda_k; \omega]$ класс функций, который при условии (11) совпадает с классом $H_2[\rho; \omega]$, а при условии (18) — с классом $\lambda_2[\Delta(\rho); \lambda_k; \omega]$.

В совместной работе С. А. Акопяна и И. О. Хачатряна ⁽⁶⁾ был установлен (в процессе доказательства теоремы 1) следующий результат.

Теорема В. При условии (18) замыкание системы (13) в метрике $L_{2,\omega}(L_p)$ совпадает с множеством граничных значений на L_p функций класса $\lambda_2[\Delta(\rho); \lambda_k; \omega]$.

На основании этого результата, теоремы 1 и формулы (12) устанавливается

Теорема 4. При условии (18) замыкание системы (15) в метрике $H_2[\gamma; \omega]$ совпадает с классом функций, допускающих представление вида

$$f(\zeta) = G_{\rho_1, \mu_1}^{-1}(\zeta; F), \quad \zeta \in \Delta(\gamma), \quad (19)$$

где $F(z) \in \lambda_2[\Delta(\rho); \lambda_k; -\omega]$ произвольна.

Отметим, что в специальном случае, когда $\omega = 0$, $\alpha = 1$, $\rho_1 = 1$ ($\gamma = +\infty$), если условимся отождествлять пространство $H_2[+\infty, 0]$ с $L_2(0, +\infty)$, теорема 4 переходит в теорему М. М. Джрбашяна ⁽⁷⁾. В этой теореме впервые была установлена полная внутренняя характеристика замыкания линейной оболочки обобщенной системы Мюнца—Саса $\{e^{-\lambda_k x} x^{\lambda_k - 1}\}_1^{\infty}$ ($\operatorname{Re} \lambda_k > 0$) в случае ее незамкнутости в $L_2(0, +\infty)$.

5°. Пусть $\{\mu_k\}_1^{\infty} \subset \Delta(\alpha) \cup \Delta^*(\alpha)$ — последовательность комплексных чисел, а m_k — кратность появления числа μ_k на отрезке $|\mu_j|_1^k$. При этом предполагаем, что в каждой области $\Delta(\alpha)$ и $\Delta^*(\alpha)$ содержится бесконечное число членов последовательности $\{\mu_k\}_1^{\infty}$, так что ее можно разбить на две последовательности $\{\mu_k^+\}_1^{\infty} \subset \Delta(\alpha)$, $\{\mu_k^-\}_1^{\infty} \subset \Delta^*(\alpha)$.

Теорема 5. Для замкнутости системы рациональных дробей

$$r(\zeta; \mu_k) = (m_k - 1)! (\zeta + \mu_k)^{-m_k} \quad (1 \leq k < +\infty) \quad (20)$$

в $L_{2,\omega}(L_p)$ необходимо и достаточно, чтобы расходились ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\mu_k^+|^{2\alpha})^{-1} \operatorname{Re}(\mu_k^+)^{\alpha}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\mu_k^-|^{2\rho})^{-1} \operatorname{Re}(-\mu_k^-)^{\rho}. \quad (21)$$

Теорема 6. Если хотя бы один из рядов (21) сходится, то замыкание системы (20) в метрике $L_{2,\omega}(L_p)$ совпадает с классом функций $F(\zeta)$, представимых в виде

$$F(\zeta) = F^{(+)}(\zeta) + F^{(-)}(\zeta), \quad \zeta \in L_p, \quad (22)$$

где $F^{(\pm)}(\zeta)$ — граничные значения на L_p произвольных функций $F^{(\pm)}(z)$ таких, что $F^{(+)}(z) \in \lambda_2^{\circ}[\Delta(\rho); \mu_k^+; \omega]$, $F^{(-)}(-z) \in \lambda_2^{\circ}[\Delta(\alpha); -\mu_k^-; \omega]$.

6°. Пусть $\frac{2\alpha}{2\alpha-1} < \rho_1 < +\infty$ и $\{v_k\}_1^\infty \subset \Delta^*\left(\frac{\rho_1}{2\alpha+\rho_1}\right) \cup \Delta(\alpha)$ — последовательность комплексных чисел, а $n_k \geq 1$ — кратность появления числа v_k на отрезке $[v_j]_1^k$. При этом предполагаем, что в каждой области $\Delta(\alpha)$ и $\Delta^*(\alpha\rho_1/(2\alpha+\rho_1))$ содержится бесконечное число членов последовательности $\{v_k\}_1^\infty$, так что ее можно разбить на две последовательности $\{v_k^+\}_1^\infty \subset \Delta(\alpha)$, $\{v_k^-\}_1^\infty \subset \Delta^*(\alpha\rho_1/(2\alpha+\rho_1))$.

Рассмотрим систему функций типа Миттаг—Леффлера

$$\omega_{\rho_1}^*(\zeta; v_k) = E_{\rho_1}^{(n_k-1)}(-v_k \zeta; \mu_1) \zeta^{n_k-1} \quad (1 \leq k < +\infty), \quad (23)$$

где

$$\mu_1 = \frac{1+\omega+\rho_1}{2\rho_1}. \quad (24)$$

Теорема 7. Пусть

$$\frac{1}{\gamma} = 2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho_1}\right), \quad \frac{1}{\beta} = 2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\rho_1}\right). \quad (25)$$

Для замкнутости системы (23) в $L_{2,\omega}(L_\gamma)$ необходимо и достаточно, чтобы расходились ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1+|v_k^+|^{2\alpha})^{-1} \operatorname{Re}(v_k^+)^{\alpha}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (1+|v_k^-|^{2\beta})^{-1} \operatorname{Re}(-v_k^-)^{\beta}, \quad (26)$$

Теорема 8. Если хотя бы один из рядов (26) сходится, то замыкание системы (23) в метрике $L_{2,\omega}(L_\gamma)$ совпадает с классом функций $f(\zeta)$, представимых в виде

$$f(\zeta) = f^{(+)}(\zeta) + f^{(-)}(\zeta), \quad \zeta \in L_\gamma. \quad (27)$$

Здесь $f^{(+)}(\zeta)$ — угловые граничные значения функции

$$f^{(+)}(z) = G_{\rho_1, \mu_1}^{-1}(z; F^{(+)}), \quad z \in \Delta(\gamma), \quad (28)$$

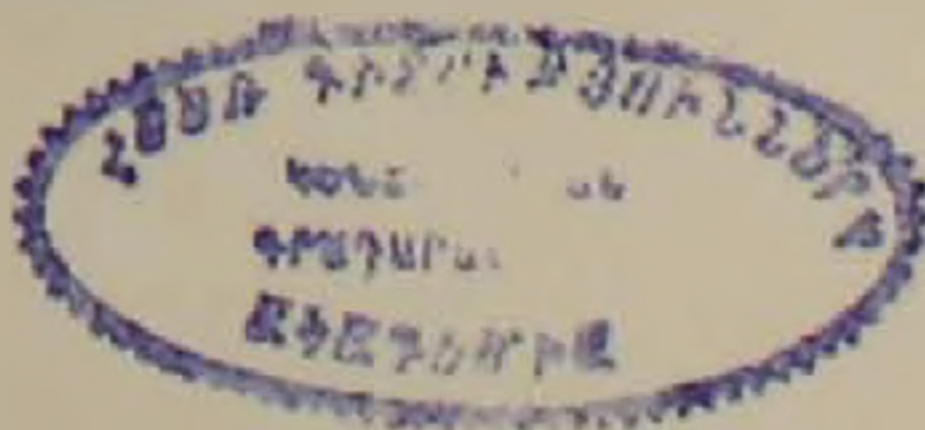
где $F^{(+)}(z) \in \lambda_2^*(\Delta(\rho); v_k^+; -\omega)$ произвольна, а $f^{(-)}(\zeta)$ — угловые граничные значения функции

$$f^{(-)}(z) = G_{\rho_1, \mu_1}^{-1}(-z; F^{(-)}), \quad z \in \Delta^*(\gamma), \quad (29)$$

где $F^{(-)}(z) \in \lambda_2^*(\Delta(\beta/(2\beta-1)); -v_k^-; -\omega)$ произвольна.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить искреннюю признательность моему научному руководителю академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и руководство при выполнении настоящей работы.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР



Միտտագ-լեֆերի տիպի ֆունկցիաների սիստեմների և պարզագույն
ոպցիոնալ կոտորակներից կազմած սիստեմների փակույթյան մասին

Ներկա աշխատանքում տրվում է Մ. Մ. Զրբաշյանի և Ա. Ե. Ավետիսյանի
համատեղ մի հոդվածում կառուցած Բորելի տիպի ձևափոխության շրջումը
և այդ արդյունքի օգնությամբ, էապես հենվելով Մ. Մ. Զրբաշյանի կողմից
ստացված Միտտագ-լեֆերի տիպի սիստեմների լրիվության հայտանիշի
վրա, ստացվել են համապատասխան հիլբերտյան տարածություններում
անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ սիստեմների լրիվության հայտանիշները:
Տրված է նաև այդ սիստեմների փակույթի ներքին նկարագրությունը նրանց
ոչ լրիվության դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян, ДАН СССР, т. 120, № 3, 457—460 (1958).
- ² М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», М., 1966. ³ М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян, ДАН СССР, т. 225, № 5, 1001—1004, (1975). ⁴ М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 219, № 6, 1302—1305 (1974). ⁵ Н. Винер, Р. Пэли, Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Наука», 1964. ⁶ С. А. Акопян, И. О. Хачатрян, Известия. АН СССР, матем. сер. т. 40, № 1, (1976), 96—114. ⁷ М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 141, № 3, 539—542 (1961).

