ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXII 1976 5

УДК 519.14

МАТЕМАТИКА

Т. Э. Пилипосян

Об одной задаче размещения

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 28/IV 1976)

Пусть P^m m — мерная целочисленная решетка, т. е. множество тех точек m — мерного евклидова пространства, которые имеют целочисленные координаты. В P^m введем метрику следующим образом: если $a=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ и $b=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ точки множества P^m, то $\rho(a, b)=\sum\limits_{i=1}^{m} |\alpha_i-\beta_i|$.

Введем следующие обозначения:

$$C^m(a, i) = \{b/b\in P^m \quad \rho(a, b)=i\}$$

$$D^m(a, i) = \{b/b\in P^m \quad \rho(a, b)\leqslant i\}$$

$$\delta^m(i) = |C^m(a, i)|$$

$$\gamma^m(i) = |D^m(a, i)|$$

$r_{m,n}$ —целочисленное решение неравенства

$$\gamma^m(x+1)>n\geqslant\gamma^m(x), \tag{1}$$

где $a\in P^m$, i, m, n натуральные числа, $|A|$ мощность множества A. $C^m(a, i)$ $[D^m(a, i)]$ называется m — мерной сферой [шаром] с радиусом i, с центром в точке a. Очевидно, что $\delta^m(i)$ и $\gamma^m(i)$ не зависят от точки a.

Определение 1. n— окрестностью точки $a\in P^m$ назовем любое множество $A\subset P^m$, удовлетворяющее условиям:

$$|A|=n$$

$$D^m(a, r_{m,n})\subseteq A\subset D^m(a, r_{m,n}+1).$$

Определение 2. Размещением графа $G(X, U)$ в P^m называется однозначное отображение $\varphi: X\to P^m$, такое, что $x_1\neq x_2\Rightarrow\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$

Определение 3. Длиной ребра $e=(x_1, x_2)\in U$ при размещении φ назовем величину $E^m(\varphi, e)=\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$, а величину

$E^m(\varphi, G)=\sum_{e\in U} E^m(\varphi, e)$ назовем длиной графа G при размещении φ. Величину $E^m(G)=\min_{\varphi} E^m(\varphi, G)=E^m(\varphi_0, G)$ назовем длиной графа G, а φ_0 оптимальным размещением.

Через T_n — обозначим класс всех деревьев n вершинами и положим $E^m(T_n)=\max_{t\in T_n} E^m(t)$

В работе ([1]) показано, что $\frac{n^2-1}{4}\leqslant E^1(T_n)<\frac{n^2}{3}$.

В работе ([2]) показано, что $E^1(T_n)=\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

В работе ([3]) показано, что $E^m(T_n)\sim 0(n^{1+\frac{1}{m}})$.

В настоящей работе получено точное выражение для $E^m(T_n)$.

Рассмотрим n — вершинную звезду R_n. Пусть a некоторая точка из P^m. Рассмотрим любую n — окрестность точки a. Вершины звезды разместим в точках n — окрестности точки a таким образом, чтобы вершина с наибольшей степенью попала в точку a. Очевидно, что такое размещение φ является оптимальным для звезды для которого

$$E^m(R_n)=E^m(\varphi, R_n)=\sum_{i=1}^{r_{m,n}} i\delta^m(i)+(r_{m,n}+1)(n-\gamma^m(r_{m,n})) \quad (2)$$

Теорема. *Для любого m, и для любого $t\in T_n$*

$$E^m(R_n)\geqslant E^m(t)$$

Доказательство проведем индукцией по n. Для $n=1,2$ справедливость утверждения теоремы очевидна. Пусть она верна для любого дерева $t\in T_n$ докажем, что она верна и для любого $t\in T_{n+1}$.

Пусть $t\in T_{n+1}$ некоторое дерево, x_2 — некоторая его висячая вершина, а (x_1, x_2) является ребром.

Рассмотрим дерево $t'\in T_n$, которое получается из t удалением вершины x_2.

Пусть φ—оптимальное размещение дерева t' в P^m. Так как теорема для t' верна, то $E^m(R_n)\geqslant E^m(\varphi, t')$. Рассмотрим точку $\varphi(x_1)$ и некоторую ее $n+1$ — окрестность. Очевидно, что в этой окрестности найдется некоторая точка b, которой не соответствует ни одна вершина из t'. Положим $\varphi(x_2)=b$. Получим некоторое размещение дерева t.

Ясно, что $\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2))\leqslant r_{m,n}+1$, но так как $E^m(R_{n+1})=$ $=E^m(R_n)+r_{m,n}+1$ и $E^m(R_n)\geqslant E^m(\varphi, t')$ получим, что $E^m(R_{n+1})\geqslant E^m(\varphi, t)$, откуда, $E^m(R_{n+1})\geqslant E^m(t)$ что и требовалось доказать.

Следствие. $E^m(R_n)=E^m(T_n)$

Замечание. Пусть в P^m введена любая метрика ρ. Аналогичным образом определим $C^m(a, r)$ и $D^m(a, r)$, где $r\in R$ (R множество действительных неотрицательных чисел). Рассмотрим множество $B(\rho)=$

$=\{r/r\in R.\ C^m(a,r)\neq\varnothing\}$. Нетрудно заметить, что если $|C^m(a,r)|$ — независит от точки a, и $B(\rho)$ является вполне упорядоченным множеством, то все до сих пор доказанное остается верным и в этом случае.

Теперь перейдем к вычислению значений $\delta^m(n)$, $\gamma^m(n)$, $r_{m,n}$. Ясно, что $\gamma^m(n)=\sum\limits_{i=0}^{n}\delta^m(i)$. Легко видеть, что существует взаимооднозначное соответствие между точками множества $C^m(a,n)$ и множеством векторов $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ удовлетворяющих следующим условиям:

α) $a_i\in\{1,-1,2,-2,\ldots,m,-m\}$ $\quad i=1,2,\ldots,n$,

β) $|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\ldots\leqslant|a_n|$,

γ) $a_i\neq -a_j$ $\quad i,j=1,2,\ldots,n$.

Количество векторов удовлетворяющие условиям α, β, γ и имеющие i различные отрицательные компоненты, равно $C_m^i\cdot\bar{C}_m^{n-i}$ где $C_m^i(\bar{C}_m^i)$ количество сочетаний из m элементов по i без повторений (с повторениями).

Следовательно

$$\delta^m(n)=\sum_{i=0}^{m}\bar{C}_m^{n-i}\cdot C_m^i=\sum_{i=0}^{m}C_{m+n-i-1}^{m-1}\cdot C_m^i\sim O(n^{m-1}),$$

$$\gamma^m(n)=\sum_{i=0}^{n}\delta^m(i)\sim O(n^m).$$

Отсюда и из (1) следует $r_{m,n}\sim O(n^{\frac{1}{m}})$

Из этих оценок и из (2) видно, что $E^m(T_n)\sim O(n^{1+\frac{1}{m}})$

В частности, при $m=1$ из (2) получим, что $E^1(T_n)=\left[\frac{n^2}{4}\right]$, а при $m=2$ $E^2(T_n)=\frac{k_0+1}{3}(3n-2(k_0+1)^2-1)$ где $k_0=\left[\frac{\sqrt{2n-1}-1}{2}\right]$.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Տ. Է. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ

Դասավորության մի խնդրի մասին

Դիցուք P^m-ը m չափանի էվկլիդյան տարածության ամբողջարժեք կոորդինատներով կետերի բազմությունն է հետևյալ մետրիկայով

$$\rho(a,b)=\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i-\beta_i| \qquad \text{որտեղ՝} \qquad \begin{array}{l} a=(\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_m)\\ b=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m).\end{array}$$

Դիցուք $G(X,U)$ որևէ գրաֆ է, իսկ T_n-ը n գագաթանի ծառերի բազմությունն է։ $\varphi: X\to P^m$ միարժեք արտապատկերումը կանվանենք գրաֆի դասավորություն P^m-ում, եթե այն բանից, որ $x_1\neq x_2$, հետևում է, որ $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$.

Դիցուք $e = (x_1, x_2) \in U$

Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

$$E^m(\varphi, e) = \rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$$

$$E^m(\varphi, G) = \sum_{e \in U} E^m(\varphi, e)$$

$$E^m(G) = \min_{\varphi} E^m(\varphi, G)$$

$$E^m(T_n) = \max_{t \in T_n} E^m(t)$$

R_n-ով նշանակենք n գագաթանի աստղը։

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ $E^m(R_n) = E^m(T_n)$ և տրվում է բանաձև $E^m(T_n)$-ը հաշվելու համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. А. Шейдвассер*, «Об оптимальной нумерации вершин дерева», Дискретный анализ, вып. 17, 56—74 (1970). [2] *М. А. Иорданский*, ДАН СССР, т. 218, № 2, 272—275 (1974). [3] *М. А. Шейдвассер*, Сб. «Пробл. киб.», № 29, 63—102 (1974).