ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 5

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян, Н. С. Земляной

Асимптотический анализ системы $GI/G/r/n-r$ при „быстром" обслуживании

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 30/XII 1975)

Настоящая заметка является продолжением работы ([1]), где изучалась система $GI/G/r/n-r$ в случае „быстрого" обслуживания.

Рассматривается система $GI/G/r/n-r$ массового обслуживания. Пусть промежутки времен между соседними поступлениями вызовов в совокупности независимы и одинаково распределены с функцией распределения (ф. р.) $A(t)$, $A(0)=0$.

Длительности обслуживания вызовов в совокупности независимы, не зависят от процесса поступления и имеют ф. р. $B(t)$, $B(0)=0$.

Нас интересует асимптотическое распределение момента первой потери вызова τ при „быстром" обслуживании.

Положим

$$\beta_\gamma=\int_0^\infty t^\gamma\, dB(t) \quad (\gamma>0).$$

Мгновенная интенсивность $a(t)$ определяется из уравнения

$$A(t)=1-\exp\left\{-\int_0^t a(u)\,du\right\}.$$

Пусть: а) $A(t)$ —фиксированная ф. р. и

$$a_u^{-1}=[\bar{A}(u)]^{-1}\cdot\int_0^\infty t\,dA(t+u)$$

по $u(0\leqslant u<+\infty)$ в совокупности ограничены, где $\bar{A}(u)=1-A(u)$;

б) $a(t)$ ограничена $(0\leqslant a(t)<C<+\infty,\ 0\leqslant t<+\infty)$;

в) в окрестности нуля $a(t)$ представима в виде

$$a(t)=\alpha t^m+O(t^{m+1}) \quad (t\downarrow 0,\ \alpha>0,\ m\geqslant 0).$$

Теорема. *Если выполнены условия* а), б), в), *то*

$$\lim P\{a_0 J\tau > x\} = e^{-x} \quad (x \geqslant 0),$$

$$\frac{\beta_{(n+1)(m+1)}}{\beta_1^{(n+1)(m+1)-1}} \to 0,$$

где

$$J = a^n \int_{x_n > \dots > x_1 > 0} \dots \int \prod_{l=1}^{n} (x_l - x_{l-1})^m \prod_{j=0}^{r-1} \overline{B}(x_n - x_j) dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \frac{a^n \cdot (m!)^{n-r+1}}{[(n-r+1)(m+1)-1]!} \int_{x_n > x_{r-1} > \dots > x_1 > 0} \dots \int x_1^m (x_2 - x_1)^m \dots (x_{r-1} - x_{r-2})^m (x_n -$$

$$- x_{r-1})^{(n-r+1)(m+1)-1} \prod_{j=0}^{r-1} \overline{B}(x_n - x_j) dx_1 \dots dx_{r-1} dx_n;$$

$$\overline{B}(x) = 1 - B(x).$$

Доказательство. *А*. Пусть A_k —событие, заключающееся в том, что за последний период занятости до первой потери вызова обслужено ровно k штук вызовов ($k \geqslant 0$).

Положим: $q_k = P(A_k)$. Тогда имеем $q = q_0 + q_1 + \dots$

Просто выписывается равенство

$$q_0 = \int_{x_n > \dots x_1 > 0} \dots \int \prod_{l=1}^{n} \left\{ a(x_l - x_{l-1}) \exp\left[- \int_0^{x_l - x_{l-1}} a(u) du \right] \right\} \prod_{l=0}^{r-1} \overline{B}(x_n - x_j) dx_1 \dots dx_n \tag{1}$$

Пусть $\vec{k} = (k_1 \dots, k_n)$, $|\vec{k}| = k_1 + \dots + k_n$ и $S_{\vec{k}}$ (ε) для $\varepsilon > 0$ есть область

$$S_{\vec{k}}(\varepsilon) = S_n \cap \{\vec{k}\}, \quad S_n = \{x_n > \dots > x_1 > 0\},$$

где

$$k_l = \begin{cases} 0, \text{ если } x_l - x_{l-1} < \varepsilon, \\ 1, \text{ если } x_l - x_{l-1} \geqslant \varepsilon. \end{cases} \quad (l = 1, n)$$

Введем в рассмотрение следующие интегралы:

$$Q = \int_{S_n} \dots \int \prod_{l=1}^{n} a(x_l - x_{l-1}) \prod_{j=0}^{r-1} \overline{B}(x_n - x_j) dx_1 \dots dx_n,$$

$$Q_{s\vec{k}}(\varepsilon) = \int_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)} \dots \int \prod_{l=1}^{n} a(x_l - x_{l-1}) \prod_{j=0}^{s-1} \overline{B}(x_n - x_j) dx_1 \dots dx_n,$$

$$(s = 1, r)$$

$$J_{s\vec{k}}(\varepsilon)=\alpha^n\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\dots\int\prod_{l=1}^{n}(x_l-x_{l-1})^m\prod_{j=0}^{s-1}\overline{B}(x_n-x_j)dx_1\dots dx_n$$

$$(s=1,\ r)$$

$$N=\alpha^n\int\limits_{S_n}\dots\int\prod_{l=1}^{n}(x_l-x_{l-1})^m\prod_{j=0}^{n-1}\overline{B}(x_n-x_j)dx_1\dots dx_n,$$

$$D=\int\limits_{S_n}\dots\int e^{-Cx_n}\cdot\prod_{l=1}^{n}a(x_l-x_{l-1})\prod_{j=0}^{r-1}\overline{B}(x_n-x_j)dx_1\dots dx_n,$$

$$R=\int\limits_{S_n}\dots\int x_n\overline{B}(x_n)\prod_{l=1}^{n}a(x_l-x_{l-1})dx_1\dots dx_n,$$

$$R_{\vec{k}}(\varepsilon)=\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\dots\int x_n\overline{B}(x_n)\prod_{l=1}^{n}a(x_l-x_{l-1})dx_1\dots dx_n,$$

$$V=\alpha^n\int\limits_{S_n}\dots\int x_n\overline{B}(x_n)\prod_{l=1}^{n}(x_l-x_{l-1})^m dx_1\dots dx_n,$$

$$V_{\vec{k}}(\varepsilon)=\alpha^n\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\dots\int x_n\overline{B}(x_n)\prod_{l=1}^{n}(x_l-x_{l-1})^m dx_1\dots dx_n,$$

$$W_{\vec{k}}(\varepsilon)=\alpha^{n-|\vec{k}|}\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\dots\int x_n\overline{B}(x_n)\prod_{\{k_l=0\}}(x_l-x_{l-1})^m\prod_{\{k_l=1\}}a(x_l-x_{l-1})dx_1\dots dx_n,$$

$$M_{s\vec{k}}(\varepsilon)=\alpha^{n-|\vec{k}|}\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\dots\int\prod_{\{k_l=0\}}(x_l-x_{l-1})^m\prod_{\{k_l=1\}}a(x_l-x_{l-1})\prod_{j=0}^{s-1}\overline{B}(x_n-x_j)dx_1\dots dx_n$$

$$(s=1,\ r).$$

Б. Покажем, что $J\sim q_0$ при $\beta_{n(m+1)+1}/\beta_1^{n(m+1)}\to 0$.

Для каждого $\varepsilon>0$ существует $C_1(\varepsilon)\geqslant 1$ такое, что $C_1(\varepsilon)\alpha\varepsilon^m\geqslant C$. Поскольку

$$R=R_{\vec{0}}(\varepsilon)+\sum_{|\vec{k}|>0}R_{\vec{k}}(\varepsilon)$$

и при $\varepsilon\downarrow 0$

$$R_{\vec{0}}(\varepsilon)=V_{\vec{0}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon)),$$

$$\sum_{|\vec{k}|>0}R_{\vec{k}}(\varepsilon)=\sum_{|\vec{k}|>0}W_{\vec{k}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\vec{k}|>0} C^{|\vec{k}|}\alpha^{n-|\vec{k}|}\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\cdots\int x_n\prod_{\{k_l=0\}}(x_l-x_{l-1})\bar{B}(x_n)dx_1\ldots dx_n(1+O(\varepsilon))\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{|\vec{k}|>0}|C_1(\varepsilon)|^{|\vec{k}|}V_{\vec{k}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon)),$$

то

$$R\leqslant\sum_{|\vec{k}|>0}V_{\vec{k}}(\varepsilon)\,|C_1(\varepsilon)|^{|\vec{k}|}(1+O(\varepsilon))\leqslant|C_1(\varepsilon)|^nV\cdot(1+O(\varepsilon)). \tag{2}$$

Для вычисления интеграла V в (2) воспользуемся тождеством

$$\int\limits_{x=y}^{z}(z-x)^m(x-y)^{km+k-1}dx=(z-y)^{k(m+1)+m}\,\mathrm{Be}\,(m+1,\ k(m+1)),$$

где $\mathrm{Be}(u,\ v)$ — бета—функция ($u\geqslant1$, $v\geqslant1$) Имеем

$$V=\alpha^n\prod_{k=1}^{n-1}\mathrm{Be}\,(m+1,\ k(m+1))\cdot\int\limits_0^\infty x^{n(m+1)}\bar{B}(x)dx=$$

$$=\alpha^n[(n(m+1)+1)!]^{-1}\cdot[m!]^n n(m+1)\beta_{n(m+1)+1}. \tag{3}$$

Нетрудно получить следующее неравенство

$$N\geqslant\alpha^n[m!]^n[((m+1)n)!]^{-1}\beta_1^{n(m+1)}. \tag{4}$$

Далее, при $\varepsilon\downarrow0$

$$|J-Q|\leqslant|J_{r\vec{0}}(\varepsilon)-Q_{r\vec{0}}(\varepsilon)|+\sum_{|\vec{k}|>0}|J_{r\vec{k}}(\varepsilon)-M_{r\vec{k}}(\varepsilon)|+\sum_{|\vec{k}|>0}|M_{r\vec{k}}(\varepsilon)-Q_{r\vec{k}}(\varepsilon)|\leqslant$$

$$\leqslant|J_{r\vec{0}}(\varepsilon)-J_{r\vec{0}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))|+\sum_{|\vec{k}|>0}|J_{r\vec{k}}(\varepsilon)+M_{r\vec{k}}(\varepsilon)|+\sum_{|\vec{k}|>0}|M_{r\vec{k}}(\varepsilon)-$$

$$-M_{r\vec{k}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))|\leqslant JO(\varepsilon)+\sum_{|\vec{k}|>0}\{J_{r\vec{k}}(\varepsilon)+M_{r\vec{k}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))\}\leqslant JO(\varepsilon)+$$

$$+\sum_{|\vec{k}|>0}\{J_{r\vec{k}}(\varepsilon)+J_{r\vec{k}}(\varepsilon)C_1^{|\vec{k}|}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))\}\leqslant2C_1^n(\varepsilon)\sum_{|\vec{k}|>0}J_{r\vec{k}}(\varepsilon)+JO(\varepsilon).$$

Таким образом, при $\varepsilon\downarrow0$

$$|J-Q|\leqslant2C_1^n(\varepsilon)\sum_{|\vec{k}|>0}J_{r\vec{k}}(\varepsilon)+JO(\varepsilon). \tag{5}$$

Так как при $|\vec{k}|>0$

$$J_{1\vec{k}}(\varepsilon)\leqslant\alpha^n\int\limits_{\substack{x_n>\ldots>x_1>0\\x_n>\varepsilon}}\cdots\int\prod_{l=1}^{n}(x_l-x_{l-1})^m\bar{B}(x_n)dx_1\cdots dx_n=$$

$$=\alpha^n|m!|^n|(n(m+1)-1)!|^{-1}\int\limits_{x>\varepsilon}x^{n(m+1)-1}\bar{B}(x)dx\leqslant$$

$$\leqslant\alpha^n|m!|^n|(n(m+1)-1)!|^{-1}\varepsilon^{-1}\int\limits_{x>\varepsilon}x^{n(m+1)}\bar{B}(x)dx\leqslant$$

$$\leqslant\alpha^n|m!|^n|(n(m+1)+1)!|^{-1}n(m+1)\beta_{n(m+1)+1},$$

то по (4)

$$J^{-1}\sum_{|\vec{k}|>0} J_{r\vec{k}}(\varepsilon)\leqslant N^{-1}\sum_{|\vec{k}|>0} J_{1\vec{k}}(\varepsilon)\leqslant \frac{n(m+1)}{\varepsilon[n(m+1)+1]}(2^n-1)\frac{\beta_{n(m+1)+1}}{\beta_1^{n(m+1)}}. \qquad (6)$$

Теперь сравнивая (5) и (6), приходим к оценке

$$J^{-1}|J-Q|\leqslant O(\varepsilon)+C_2\frac{C_1^n(\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot\frac{\beta_{n(m+1)+1}}{\beta_1^{n(m+1)}}, \qquad (7)$$

где

$$C_2=2(2^n-1)\frac{n(m+1)}{n(m+1)+1}.$$

Выбираем $C_1(\varepsilon)=C\alpha^{-1}\varepsilon^{-m}$, а $\varepsilon=(\beta_{n(m+1)+1}/\beta_1^{n(m+1)})^{\frac{\delta}{nm+1}}$ $(0<\delta<1)$, откуда на основе (7) находим $J\sim Q$.

С другой стороны

$$J^{-1}(Q-q_0)\leqslant N^{-1}(Q-D)\leqslant N^{-1}\cdot C\cdot R$$

и

$$J^{-1}|J-q_0|\leqslant J^{-1}|J-Q|+J^{-1}(Q-q_0)\leqslant J^{-1}|J-Q|+N^{-1}CR \qquad (8)$$

Наконец, при выбранных $\varepsilon>0$ и $C_1(\varepsilon)$, когда $\varepsilon\downarrow 0$, из (2)—(4)

$$N^{-1}R\leqslant C_3[C_1(\varepsilon)]^n(\beta_{n(m+1)+1}/\beta_1^{n(m+1)})\to 0,$$

откуда, вкупе с (7), (8), заключаем при $\beta_{n(m+1)+1}/\beta_1^{n(m+1)}\to 0$, $J^{-1}(J-q_0)\to 0$, что и т. д.

В. Покажем, что $q\sim q_0$ при $\beta_{(n+1)(m+1)}/\beta_1^{n(m+1)}\to 0$.

Можно вывести неравенство

$$q_1+q_2+\ldots\leqslant\int_{x_{n+1}>\ldots>x_1>0}\cdots\int G(x_{n+1})\prod_{l=1}^{n+1}|a(x_l-x_{l-1})\exp[-\int_0^{x_l-x_{l-1}}a(u)du]|dx_1\ldots dx_{n+1}\leqslant$$

$$\leqslant\int_{x_{n+1}>\ldots>x_1>0}\cdots\int\bar{G}(x_{n+1})\prod_{l=1}^{n+1}a(x_l-x_{l-1})dx_1\ldots dx_{n+1}\overset{\text{def}}{=}H, \qquad (9)$$

где

$$G(x)=1-[B(x)]_*^{n+1}.$$

Для доказательства эквивалентности

$$H\sim T\overset{\text{def}}{=}\alpha^{n+1}\int_{x_{n+1}>\ldots>x_1>0}\cdots\int\bar{G}(x_{n+1})\prod_{l=1}^{n+1}(x_l-x_{l-1})^m dx_1\ldots dx_{n+1}$$

введем в рассмотрение интегралы ($S_{\vec{k}}(\varepsilon)$ совпадает с введенным ранее, но при $n+1$).

$$H_{\vec{k}}(\varepsilon)=\int_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\cdots\int G(x_{n+1})\prod_{l=1}^{n+1}a(x_l-x_{l-1})dx_1\ldots dx_{n+1},$$

$$T_{\vec{k}}(\varepsilon)=\alpha^{n+1}\int_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\cdots\int\bar{G}(x_{n+1})\prod_{l=1}^{n+1}(x_l-x_{l-1})^m dx_1\ldots dx_{n+1}, \quad (\varepsilon>0)$$

$$L_{\vec{k}}(\varepsilon)=\alpha^{n-|\vec{k}|+1}\int\limits_{S_{\vec{k}}(\varepsilon)}\ldots\int G(x_{n+1})\prod_{\{k_l=0\}}(x_l-x_{l-1})^m\prod_{\{k_l=1\}}a(x_l-x_{l-1})\,dx_1\ldots dx_{n+1}.$$

При любом $\varepsilon\downarrow 0$ произведем оценки

$$|H-T|\leqslant|H_{\vec{0}}(\varepsilon)-T_{\vec{0}}(\varepsilon)|+\sum_{|\vec{k}|>0}|H_{\vec{k}}(\varepsilon)-L_{\vec{k}}(\varepsilon)|+\sum_{|\vec{k}|>0}|L_{\vec{k}}(\varepsilon)-T_{\vec{k}}(\varepsilon)|\leqslant$$

$$\leqslant|T_{\vec{0}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))-T_{\vec{0}}(\varepsilon)|+\sum_{|\vec{k}|>0}|L_{\vec{k}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))-L_{\vec{k}}(\varepsilon)|+\sum_{|\vec{k}|>0}[L_{\vec{k}}(\varepsilon)+T_{\vec{k}}(\varepsilon)]=$$

$$=T_{\vec{0}}(\varepsilon)O(\varepsilon)+\sum_{|\vec{k}|>0}[L_{\vec{k}}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))+T_{\vec{k}}(\varepsilon)]\leqslant$$

$$\leqslant TO(\varepsilon)+\sum_{|\vec{k}|>0}T_{\vec{k}}(\varepsilon)\,[C_1^{|\vec{k}|}(\varepsilon)(1+O(\varepsilon))+1],$$

откуда при каждом $\varepsilon\downarrow 0$

$$N^{-1}|H-T|\leqslant N^{-1}\cdot T\cdot O(\varepsilon)+2C_1^{n+1}(\varepsilon)\cdot N^{-1}\sum_{|\vec{k}|>0}T_{\vec{k}}(\varepsilon). \tag{10}$$

Аналогично V подсчитывается T

$$T=\frac{\alpha^{n+1}\cdot[m!]^{n+1}}{[(n+1)(m+1)]!}\,g_{(n+1)(m+1)}, \tag{11}$$

где

$$g_j=\int\limits_0^\infty t^j\,dG(t)\qquad(j\geqslant 1).$$

Выражение $N^{-1}\sum\limits_{|\vec{k}|>0}T_{\vec{k}}(\varepsilon)$ оценивается аналогично $N^{-1}\cdot\sum\limits_{|\vec{k}|>0}J_{1\vec{k}}(\varepsilon)$ при $\varepsilon\downarrow 0$

$$N^{-1}\sum_{|\vec{k}|>0}T_{\vec{k}}(\varepsilon)\leqslant\frac{(n+1)(m+1)g_{(n+1)(m+1)}}{[(n+1)(m+1)+1]\,g_1^{n(m+1)}}.$$

Поскольку $g_1=(n+1)\beta_1$ и из неравенства ([2]) ($p>0$; $a_1>0,\ldots$ $\ldots,a_n>0$)

$$(a_1+\ldots+a_n)^p\leqslant n^{p-1}(a_1^p+\ldots+a_n^p)$$

следует

$$g_{(n+1)(m+1)}=M(\eta_1+\ldots+\eta_{n+1})^{(n+1)(m+1)}\leqslant(n+1)^{(n+1)(m+1)}\beta_{(n+1)(m+1)},$$

где случайные величины $\eta_1,\ldots,\eta_{n+1}$ независимы и имеют ф. р. $B(t)$, то условие $\beta_{(n+1)(m+1)}/\beta_1^{n(m+1)}\to 0$ влечет за собой $g_{(n+1)(m+1)}/g_1^{n(m+1)}\to 0$, т. е.

$$N^{-1}\sum_{|\vec{k}|>0}T_{\vec{k}}(\varepsilon)\to 0.$$

Следовательно, вспоминая формулы (4), (10), (11), при выборе $C_1(\varepsilon)=C\alpha^{-1}\varepsilon^{-m}$ и $\varepsilon=(\beta_{(n+1)(m+1)}/\beta_1^{n(m+1)})^{\delta/m(n+1)}\to 0$ $(0<\delta<1)$, заключаем

$$N^{-1}\cdot|H-T|\to 0. \qquad (12)$$

Наконец, по (9)

$$q_0^{-1}\sum_{i>1} q_i \leqslant q_0^{-1}\cdot H \sim J^{-1}\cdot H \leqslant N^{-1}\cdot H \leqslant N^{-1}\cdot|H-T|+N^{-1}T,$$

и, возвращаясь к (4), (11), (12), получаем, что при $\beta_{(n+1)(m+1)}/\beta_1^{n(m+1)}\to 0$

$$q_0^{-1}\sum_{i>1} q_i\to 0, \qquad \text{т. е. } q\sim q_0$$

Г. Из условия $\beta_{(n+1)(m+1)}/\beta_1^{(n+1)(m+1)-1}\to 0$ по неравенству моментов следуют $\beta_1\to 0$ и условию $\beta_{n(m+1)+1}/\beta_1^{(n+1)(m+1)}\to 0$. Очевидно также выполнение условия $\beta_{(n+1)(m+1)}/\beta_1^{n(m+1)}\to 0$. Тогда

$$J\sim q\sim q_0$$

и имеет место теорема 3. 2 работы [1], что и т. д.

Замечание. Теорема верна также при условии

$$\frac{\max(\beta_{(n+1)(m+1)},\ \beta_{n(m+1)+1})}{\beta_1^{n(m+1)}}\to 0.$$

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Ն. Ս. ՉԵՄԼՅԱՆՑ

«Արագ» սպասարկման դեպքում $GI/G/r/n-r$ տիպի սիստեմների ասիմպտոտիկ հետազոտում

Դիտարկվում է r հատ սարք և n−r սպասման տեղ ունեցող մի սիստեմ։ Առաջացող պահանջները կազմում են A(t) բաշխման ֆունկցիայով ռեկուրենտ ներմտնող հոսք (A(0)=0)։

Պահանջները սպասարկվում են միմյանցից անկախ և մի պահանջի սպասարկման ժամանակը հանդիսանում է B(t) բաշխման ֆունկցիա ունեցող պատահական մեծություն (B(0)=0)։ Սպասարկման և պահանջների առաջացման պրոցեսներն անկախ են։ Սկզբնական մոմենտին սիստեմն ազատ է պահանջներից։

Սպասարկման ժամանակի «փոքր» լինելու դեպքում պահանջի առաջին կորուստի τ պատահական մոմենտի վերաբերյալ ապացուցված է սահմանային թեորեմ.

$$\beta_\gamma=\int_0^\infty t^\gamma\, dB(t)\quad (\gamma>0),\ \ A(t)=1-\exp\left[-\int_0^\infty a(u)du\right].$$

Դիցուք՝ ա) $A(t)$-ն ֆիքսած բաշխման ֆունկցիա է և

$$a_u^{-1}=[1-A(u)]^{-1}\int_0^\infty t\,dA(t+u)$$

բոլոր u-ի $[0\leqslant u<+\infty]$ սահմանափակ են.

բ) $0\leqslant a(t)<C<+\infty,\ 0\leqslant t<+\infty.$

գ) փոքր t-ի համար՝

$$a(t)=\alpha t^m+O(t^{m+1})\quad (t\downarrow 0,\ \alpha>0),$$

որ m-ը դրական ամբողջ թիվ է.

Թեորեմ. $$\lim_{\frac{\beta_{(n+1)(m+1)}}{\beta_1^{(n+1)(m+1)-1}}\to 0} P\{a_0/\tau>x\}=e^{-x}\qquad (x\geqslant 0),$$

ուր՝

$$J=\alpha^n\int\ldots\int_{x_n>\ldots>x_1>0}\prod_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})^m\prod_{j=0}^{r-1}[1-B(x_n-x_j)]\,dx_1\ldots dx_n.$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. А. Даниелян, Н. С. Земляной*, ДАН Арм. ССР, т. LXII, № 3, 1976. [2] *Д. Б. Гнеденко, А. Д. Соловьев*. «Известия АН СССР», техническая кибернетика, № 6, 1974.