ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXII 1976 4

УДК 519.4

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

# К теории гомоморфизмов универсальных алгебр

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 30/III 1976)

1. В работах ([1–2]) вводится новое определение гомоморфизма и развивается соответствующая теория универсальных алгебр. О многих сходствах и отличиях возникающей при этом теории по сравнению с обычной теорией универсальных алгебр упомянуто нами ([2]). Настоящая работа является продолжением этих работ. Параллелизм между обычной теорией универсальных алгебр и той теорией, которая возникает при новом подходе определения гомоморфизма далеко не полный. И здесь мы замечаем ряд специфичных ситуаций, связанных с новым определением гомоморфизма. Отметим лишь один из них. Как и в обычной теории универсальных алгебр ([3]), ядра новых гомоморфизмов являются конгруэнциями. Обратное утверждение в обычной теории универсальных алгебр, как известно, также верно: каждая конгруэнция является ядром некоторого гомоморфизма. Однако, при новом определении гомоморфизма, на некоторых алгебрах, оказывается существуют такие конгруэнции, которые не являются ядрами подходящих гомоморфизмов. В связи с этим возникает понятие ядерной конгруэнции.

Под словом «алгебра» в дальнейшем подразумевается универсальная алгебра.

2. Если $D=<Q;\ \Sigma>$ —алгебра, то арность операции $A\in\Sigma$ обозначается обычным путем $|A|$. Тип алгебры $D$ определим как множество:

$$T=\{\,|A|\,|A\in\Sigma\,\}.$$

Например, тип кольца, по нашему определению, есть множество $\{2\}$. Алгебры $D$ и $D'$ называются однотипными, если они имеют равные типы. Если тип алгебры равен $T$, то ее будем еще называть $T$—алгеброй. Алгебру $D'=<Q';\Sigma'>$ будем называть подалгеброй $T$—алгебры $D=<Q;\Sigma>$ и писать $D'\leqslant D$, если $Q'\subseteq Q$, $\Sigma'\subseteq\Sigma$ и $D'$ является $T$—алгеброй. Например, каждая коммутативная группа есть подалгебра некоторого кольца. Равенство двух алгебр определяется так:

$$D=D' \Longleftrightarrow Q=Q',\ \Sigma=\Sigma'.$$

Класс всех подалгебр одной и той же алгебры (включая быть может пустое множество) образует полную решетку относительно частичного порядка „$\leqslant$".

Теорема 1. *Полная решетка всех подалгебр каждой алгебры является компактно-порожденной (определение см. в (¹)).*

Подалгебры вида $<Q';\ \Sigma>$ алгебры $<Q;\ \Sigma>$ будем называть главными подалгебрами. Класс всех главных подалгебр одной и той же алгебры также образует полную решетку.

Теорема 2. *Полная решетка главных подалгебр каждой алгебры является компактно-порожденной.*

Справедливо и обращение этого утверждения.

Теорема 3. *Каждая полная компактно-порожденная решетка изоморфна решетке главных побалгебр некоторой алгебры.*

Следствие. *Каждая полная компактно-порожденная решетка вкладывается в решетку всех подалгебр некоторой алгебры.*

Если

$$M_D = \{<Q_i;\ \Sigma_j> | i\in I,\ j\in J\}$$

есть класс всех подалгебр алгебры $D=<Q;\ \Sigma>$, то совокупности

$$M_Q = \{Q_i | i\in I\}$$

$$M_\Sigma = \{\Sigma_j | j\in J\}$$

являются полными решетками относительно теоретико-множественного включения. Эти решетки соответственно называются первой и второй решеткой подалгебр алгебры $D$. Понятно, что решетка главных подалгебр вкладывается в первую решетку подалгебр, а вторая решетка подалгебр всегда вкладывается в решетку всех подалгебр заданной алгебры.

Теорема 4. *Первая и вторая решетка подалгебр каждой алгебры является компактно-порожденной. Вторая решетка подалгебр $M_\Sigma$ каждой алгебры является подрешеткой в решетке всех частей множества $\Sigma$.*

3. Перейдем, теперь, к понятию гомоморфизма.

Пусть $D=<Q;\ \Sigma>$ и $D'=<Q';\ \Sigma'>$ две однотипные алгебры. Упорядоченная пара $(\varphi, \bar\psi)$ отображений $\varphi: Q\to Q'$, $\bar\psi: \Sigma\to\Sigma'$ называется гомоморфизмом из алгебры $D$ в алгебру $D'$ и обозначается $(\varphi, \bar\psi)$: $D\Rightarrow D'$, если отображение $\bar\psi$ сохраняет арность операций и для любых $A\in\Sigma$, $|A|=n$ и $x_1,\ldots, x_n\in Q$ справедливо равенство:

$$\varphi[A(x_1, \ldots, x_n)] = [\bar\psi A](\varphi x_1, \ldots, \varphi x_n).$$

Пара $(\varepsilon, \bar\varepsilon)$ тождественных отображений $\varepsilon: Q\to Q$, $\bar\varepsilon: \Sigma\to\Sigma$ есть гомоморфизм алгебры $D$ в себя.

Пара $<\varphi Q; \bar{\psi}\Sigma>$ является подалгеброй алгебры $D'$ и называется гомоморфным образом алгебры $D$.

Если пары $(\varphi, \bar{\psi}) : D \Longrightarrow D_1$ и $(\lambda, \bar{\mu}) : D_1 \Longrightarrow D'$ являются гомоморфизмами, то пара отображений $(\varphi\lambda, \bar{\bar{\psi\mu}})$ есть гомоморфизм $D \Longrightarrow D'$ и она называется произведением гомоморфизмов $(\varphi, \bar{\psi})$ и $(\lambda, \bar{\mu})$. Таким образом, алгебры и их гомоморфизмы (в качестве морфизмов) образуют категорию.

Гомоморфизм алгебры в себя называется ее эндоморфизмом. Множество всех эндоморфизмов одной и той же алгебры образует полугруппу с единицей.

Эндоморфизм вида $(\varphi, \bar{\varepsilon})$ называется главным эндоморфизмом. Совокупность всех главных эндоморфизмов образует полугруппу с единицей.

Теорема 5. *Каждая полугруппа с единицей изоморфна полугруппе главных эндоморфизмов подходящей алгебры.*

Следствие. *Каждая полугруппа с единицей вкладывается в полугруппу всех эндоморфизмов некоторой алгебры.*

Если

$$End\, D = \{(\varphi_i, \bar{\psi}_j) \mid i \in I, j \in J\}$$

есть полугруппа всех эндоморфизмов алгебры $D = <Q; \Sigma>$, то совокупность

$$End\, Q = \{\varphi_i \mid i \in I\}$$

образует полугруппу с единицей и называется первой полугруппой эндоморфизмов алгебры $D$. Аналогично, совокупность

$$End\, \Sigma = \{\bar{\psi}_j \mid j \in J\}$$

называется второй полугруппой эндоморфизмов.

Теорема 6. *Полугруппа главных эндоморфизмов вкладывается в первую полугруппу эндоморфизмов и*

$$End\, D = End\, Q \times End\, \Sigma$$

*тогда и только тогда, когда* $End\, \Sigma$ — одноэлементна.

Следствие. *Каждая полугруппа с единицей вкладывается в первую полугруппу эндоморфизмов некоторой алгебры.*

Гомоморфизм $(\varphi, \bar{\psi})$ называется эпиморфизмом, если отображения $\varphi, \bar{\psi}$ сюръективны и мономорфизмом, если отображения $\varphi, \bar{\psi}$ инъективны. Изоморфизм — это одновременно эпи- и мономорфизм. Изоморфизм алгебры в себя называется ее автоморфизмом. Множество всех автоморфизмов одной и той же алгебры $D$ образует группу

$Aut\,D$. Автоморфизм вида $(\varphi, \bar{\varepsilon})$ называется главным автоморфизмом, их совокупность также образует группу.

Теорема 7. *Каждая группа изоморфна группе главных автоморфизмов некоторой алгебры.*

Следствие. *Каждая группа вкладывается в группу всех автоморфизмов некоторой алгебры.*

Множество всех обратимых элементов первой полугруппы эндоморфизмов называется первой группой автоморфизмов алгебры и обозначается через $Aut\,Q$. Аналогично определяется и обозначается вторая группа автоморфизмов. Понятно, что группа главных автоморфизмов вкладывается в первую группу автоморфизмов.

Теорема 8. *Группа главных автоморфизмов является нормальным делителем во всей группе автоморфизмов и*

$$Aut\,D = Aut\,Q \times Aut\,\underline{\Sigma}$$

*тогда и только тогда, когда* $Aut\,\underline{\Sigma}$ *— одноэлементна.*

Следствие. *Каждая группа вкладывается в первую группу автоморфизмов некоторой алгебры.*

Для последнего результата справедлива и двойственная формулировка, т. е. каждую группу можно вложить и во вторую группу автоморфизмов некоторой алгебры. Мы хотим сформулировать этот результат в более сильном варианте.

Теорема 9. *Каждая группа одновременно вкладывается как в первую, так и во вторую группу автоморфизмов подходящей алгебры.*

С каждым гомоморфизмом $(\varphi, \bar{\psi}) : D \Rightarrow D'$ связана пара отношений эквивалентностей $r$ и $\bar{t}$, определенная соответственно на множествах $Q$ и $\underline{\Sigma}$ алгебры $D = \langle Q; \underline{\Sigma} \rangle$. При этом:

$$xry \Longleftrightarrow \varphi x = \varphi y,\ x, y \in Q,$$

$$A\bar{t}B \Longleftrightarrow \bar{\psi}A = \bar{\psi}B,\ A, B \in \underline{\Sigma}.$$

Упорядоченная пара $(r, \bar{t})$ называется ядром гомоморфизма $(\varphi, \bar{\psi})$ и обозначается через $Ker(\varphi, \bar{\psi})$.

4. Пусть $D = \langle Q; \underline{\Sigma} \rangle$ — произвольная алгебра, а $r$ и $\bar{t}$ — некоторые отношения эквивалентности, определенные соответственно на множествах $Q$ и $\underline{\Sigma}$. Упорядоченную пару $(r, \bar{t})$ назовем конгруэнцией алгебры $D$, если:

а) из отношений $x_1 r x_1', \ldots, x_m r x_m'$ следует

$A(x_1, \ldots, x_m) r A(x_1', \ldots, x_m')$ где, $x_i, x_i' \in Q$, $A \in \underline{\Sigma}$, $|A| = m$,

б) из отношения $A\bar{t}B$ следует $|A| = |B|$ и

$$A(x_1, \ldots, x_n)\, rB(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{для любых } x_1, \ldots, x_n \in Q,$$

$$\text{где } A,\ B \in \Sigma,\ |A| = n.$$

Нулевая конгруэнция определяется как пара $(0, \bar{0})$, где:

$$x0y \Longleftrightarrow x = y,\ x,\ y \in Q,$$

$$A\bar{0}B \Longleftrightarrow A = B,\ A,\ B \in \Sigma.$$

Единичная конгруэнция определяется как пара $(1, \bar{1})$, где:

$$x1y \Longleftrightarrow x,\ y \in Q,$$

$$A\bar{1}B \Longleftrightarrow |A| = |B|,\ A,\ B \in \Sigma.$$

Нетрудно проверить, что ядро любого гомоморфизма является конгруэнцией.

Пусть $q_1 = (r_1\ \bar{t}_1)$ и $q_2 = (r_2,\ \bar{t}_2)$ две конгруэнции некоторой алгебры, определим:

$$q_1 \leqslant q_2 \Longleftrightarrow r_1 \leqslant r_2,\ \bar{t}_1 \leqslant \bar{t}_2.$$

Класс всех конгруэнций, определенных на одной и той же алгебре образует полную решетку относительно частичного порядка „$\leqslant$".

Теорема 10. *Полная решетка всех конгруэнций каждой алгебры является компактно-порожденной.*

Если

$$L_D = \{ (r_i,\ \bar{t}_j) \mid i \in I,\ j \in J \}$$

есть класс всех конгруэнций алгебры $D$, то совокупности

$$L_Q = \{ r_i \mid i \in I \}$$

$$\text{и } L_\Sigma = \{ \bar{t}_j \mid j \in J \}$$

также образуют полные решетки. Решетки $L_Q$ и $L_\Sigma$ называются соответственно первой и второй решеткой конгруэнций алгебры $D = \langle Q; \Sigma \rangle$.

Теорема 11. *Первая и вторая решетки когруэнций каждой алгебры являются компактно-порожденными.*

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 12. *Каждая полная компактно-порожденная решетка изоморфна первой решетке конгруэнций некоторой алгебры.*

Существует и другая характеристика первой и второй решетки конгруэнций. А именно справедлива следующая.

Теорема 13. *Первая решетка конгруэнций $L_Q$ является подрешеткой в решетке всех эквивалентностей множества $Q$. Вторая решетка $L_\Sigma$ является подрешеткой в решетке всех эквивалентностей множества $\Sigma$.*

Пусть $q=(r,\bar{t})$ есть конгруэнция алгебры $D=<Q;\Sigma>$. Элементы фактор-множества $\Sigma/\bar{t}=\bar{\Sigma}$ можно трактовать как операции, определенные на фактор-множестве $Q/r=\bar{Q}$ следующим путем:

$$\bar{A}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)=\overline{A(x_1,\ldots,x_n)},$$

где $\bar{A}\in\bar{\Sigma}$, $|A|=n$, $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n\in\bar{Q}$.

Корректность определения операций $\bar{A}$ следует из определения конгруэнции. Таким образом, определена алгебра $<Q/r;\Sigma/\bar{t}>$, называемая фактор-алгеброй алгебры $D$ по конгруэнции $q$ и обозначается как $D/q$.

Фактор-алгебра $T$—алгебры есть $T$—алгебра.

Пара $(\varphi_*,\bar{\psi}_*)$ отображений $\varphi_*: x\to\bar{x}$, $\bar{\psi}_*: A\to\bar{A}$ является эпиморфизмом $D\Rightarrow D/q$. Он называется естественным гомоморфизмом.

Теорема о гомоморфизмах. *Если $(\varphi,\bar{\psi}): D\to D'$ есть эпиморфизм и $Ker(\varphi,\bar{\psi})=q$, то существует изоморфизм $(\lambda,\bar{\mu})$: $D'\to D/q$ такой, что коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{(\varphi,\bar{\psi})} & D' \\ & {\scriptstyle(\varphi_*,\bar{\psi}_*)}\searrow & \Big\| {\scriptstyle(\lambda,\bar{\mu})} \\ & & D/q \end{array}$$

*т. е. $\varphi_*=\varphi\lambda$ и $\bar{\psi}_*=\bar{\psi}\bar{\mu}$.*

5. Как уже было отмечено, ядро $(r,\bar{t})$ любого гомоморфизма является конгруэнцией. Обратное увeрждение однако не верно, т. е. существуют конгруэнции не являющиеся ядрами подходящих гомоморфизмов. Рассмотрим пример алгебры $<Q;\Sigma>$, для которой отображение $A\to|A|$ не является инъекцией. Пара $q=(1,\bar{t})$, где $\bar{t}<\bar{1}$, является конгруэнцией алгебры $<Q;\Sigma>$, хотя понятно, что она не может быть ядром для некоторого гомоморфизма.

В связи с этим конгруэнцию $q=(r,\bar{t})$ будем называть ядерной, если она является ядром некоторого гомоморфизма. Для каждой алгебры нулевая и единичная конгруэнции являются ядерными. Существует такая алгебра, которая не обладает другими ядерными конгруэнциями, кроме нулевого и единичного. Например, алгебра $<Q;\Sigma>$, где $\Sigma$ —класс всех унарных операций определенных на множестве $Q$. Напротив, существуют и алгебры, каждая конгруэнция которого ядерна. Этим свойством обладает, например, каждый группоид.

Теорема 14. *Конгруэнция $q=(r,\bar{t})$ алгебры $D=<Q;\Sigma>$ является ядерной тогда и только тогда, когда она является ядром естественного гомоморфизма $(\varphi,\bar{\psi}): D \Longrightarrow D/q$.*

Пусть $S$ —некоторое множество и $\Theta$ —некоторое отношение эквивалентности этого множества. Если $H\subseteq S$, то его $\Theta$ —замыкание обозначим через $[H]\Theta$:

$[H]\Theta = \{a\in S \mid a\Theta h$ для некоторого $h\in H\}$.

Ограничение отношения $\Theta$ на подмножестве $H$ будем обозначать через $\Theta_H$.

Если $D' = <Q';\Sigma'>$ есть подалгебра алгебры $D=<Q;\Sigma>$ и $q=(r,\bar{t})$ —конгруэнция алгебры $D$, то нетрудно проверить, что пара $<[Q']r;[\Sigma']\bar{t}>$ является подалгеброй алгебры $D$ и пара $<r_{Q'};\bar{t}_{\Sigma'}>$—конгруэнцией подалгебры $D'$. Подалгебру $<[Q']r;[\Sigma']\bar{t}>$ обозначим через $[D']q$, а конгруэнцию $<r_{Q'},\bar{t}_{\Sigma'}>$ —через $q_{D'}$.

Первая теорема об изоморфизмах. *Если $D'$—подалгебра алгебры $D$ и $q$—конгруэнция алгебры $D$ такая, что $[D']q=D$ то алгебры $D/q$ и $D'/q_{D'}$ изоморфны.*

Пусть $D=<Q;\Sigma>$—произвольная алгебра и $q=(r,\bar{t})$ —ядерная конгруэнция алгебры $D$. Рассмотрим произвольную конгруэнцию $\phi=(e,\bar{s})$ алгебры $D$ такую, что $q\leq\phi$. Определим бинарные отношения $e/r$ и $\bar{s}/\bar{t}$ соответственно на множествах $Q/r$ и $\Sigma/\bar{t}$ следующим путем:

$$\bar{x}\; e/r\; \bar{y} \Longleftrightarrow x l y,\ x,y\in Q,\ \bar{x},\bar{y}\in\bar{Q},$$

$$\bar{A}\; \bar{s}/\bar{t}\; \bar{B} \Longleftrightarrow A\bar{s}B,\ A,B\in\Sigma,\ \bar{A},\bar{B}\in\bar{\Sigma}.$$

Из ядерности конгруэнции $q$ следует, что отношения $e/r$ и $\bar{s}/\bar{t}$ определены корректно и нетрудно проверить, что пара $<e/r,\bar{s}/\bar{t}>$ является конгруэнцией на фактор-алгебре $D/q$. Конгруэнция $<e/r,\bar{s}/\bar{t}>$ обозначается через $\phi/q$.

Вторая теорема об изоморфизмах. *Если $q$ и $\phi$ такие ядерные конгруэнции алгебры $D$, что $q<\phi$, то алгебры $D/\phi$ и $D/q/\phi/q$ изоморфны.*

Ереванский государственный университет.

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

## Ունիվեսալ հանրահաշիվների հոմոմորֆիզմների տեսության շուրջ

*Հեղինակի ([1, 2]) աշխատանքներում ներմուծվել է հոմոմորֆիզմի նոր սահմանում և զարգացվել ունիվեսալ հանրահաշիվների համապատասխան տեսություն։ Ներկա հոդվածը հանդիսանում է ([1, 2]) աշխատանքների շարունակությունը։ Հոդվածում ուսումնասիրվում են՝*

*1. Ունիվերսալ հանրահաշվի ավտոմորֆիզմների առաջին, երկրորդ և գլխավոր խմբերը։*

*2. Ունիվերսալ հանրահաշվի էնդոմորֆիզմների առաջին, երկրորդ և գլխավոր կիսախմբերը։*

*3. Ունիվերսալ հանրահաշվի կոնգրուենցիաների առաջին և երկրորդ ստրուկտուրաները։*

*4. Ունիվերսալ հանրահաշվի միջուկային կոնգրուենցիաները։*

*Հետազոտությունների բոլոր այս ուղղությունները կապված են հոմոմորֆիզմի նոր սահմանման հետ։*

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. М. Мовсисян*, «Научный работник ЕГУ», № 18, 3—11, 1973. [2] *Ю. М. Мовсисян* «Известия АН Арм. ССР», сер. «Математика», № 5, 1976. [3] *П. Кон*, Универсальная алгебра, «Мир», 1968. [4] *А. Г. Курош*, Общая алгебра, «Наука», 1974.