

УДК 513.88

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Талалян

Два следствия из неравенства Пэли—Зигмунда

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 17/III 1976)

Пусть H — действительное или комплексное гильбертово пространство, $u_1, u_2, \dots, u_n$ — произвольные векторы из H и $0 < \lambda < 1$. Тогда имеет место следующее неравенство Пэли—Зигмунда, ((¹)стр. 48)

$$m \left\{ t \in [0, 1] : \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) u_i \right\|^2 > \lambda \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 \right)^{1/2} \right\} > \frac{1}{3} (1 - \lambda^2)^2, \quad (1)$$

где m — мера Лебега на $[0, 1]$ и $r_i(t)$ — функции Радемахера.

В настоящей заметке показано, что неравенство (1) позволяет перенести некоторые теоремы о действительных функциональных рядах на ряды функций со значениями в гильбертовом пространстве. Отметим при этом, что известные нам доказательства приведенных ниже теорем 1 и 2 для случая действительных функциональных рядов не используют соответствующего варианта неравенства (1) и основаны на других фактах.

Всюду в дальнейшем приняты следующие обозначения: H — действительное или комплексное гильбертово пространство, (Ω, μ) — вероятностное пространство и $x_i, i=1, 2, \dots$ — измеримые отображения Ω в H .

Теорема 1. Если ряд $\sum x_i(\omega)$ безусловно сходится по мере на Ω , то ряд $\sum \|x_i(\omega)\|^2$ сходится почти всюду на Ω .

Доказательство. Предположим обратное. Пусть ряд $\sum \|x_i(\omega)\|^2$ расходится на множестве положительной меры. Тогда найдется множество $\Omega_0 \subset \Omega$ с $\mu(\Omega_0) > 0$, число $M > 0$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такие, что выполняется неравенство

$$\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \|x_i(\omega)\|^2 > M, \quad \omega \in \Omega_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Для любого натурального числа k и для любого $\omega \in \Omega_0$ положим:

$$E_{k,\omega} = \left\{ t \in [0, 1] : \left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} r_i(t) x_i(\omega) \right\| > \lambda \left(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \|x_i(\omega)\|^2 \right)^{1/2} \right\}. \quad (3)$$

Применяя неравенство Пэли—Зигмунда к системе векторов $0, \dots, 0, x_{n_k+1}(\omega), \dots, x_{n_{k+1}}(\omega)$ получим:

$$m(E_{k,\omega}) > \frac{1}{3} (1 - \lambda^2)^2. \quad (4)$$

Пусть α — некоторое число из интервала $(0, \frac{1}{3} (1 - \lambda^2)^2)$.

Для любого натурального числа k и для любого $t \in [0, 1]$ положим:

$$\Omega_{k,t} = \{\omega \in \Omega_0 : t \in E_{k,\omega}\}$$

и

$$E_k = \{t \in [0, 1] : \mu(\Omega_{k,t}) > \alpha \mu(\Omega_0)\}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$m(E_k) \geq \frac{\frac{1}{3} (1 - \lambda^2)^2 - \alpha}{1 - \alpha}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Для доказательства (5) положим

$$G_k = \{(t, \omega) \in [0, 1] \times \Omega : \omega \in \Omega_0, t \in E_{k,\omega}\}$$

и пусть χ_k есть характеристическая функция множества G_k .

Тогда из (4) в силу теоремы Фубини получим:

$$\int_0^1 m(dt) \int_{\Omega} \chi_k(t, \omega) \mu(d\omega) > \frac{1}{3} (1 - \lambda^2)^2 \mu(\Omega_0). \quad (6)$$

С другой стороны, в силу определения множеств E_k имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 m(dt) \int_{\Omega} \chi_k(t, \omega) \mu(d\omega) &= \int_{E_k} m(dt) \int_{\Omega} \chi_k(t, \omega) \mu(d\omega) + \\ &+ \int_{[0,1] \setminus E_k} m(dt) \int_{\Omega} \chi_k(t, \omega) \mu(d\omega) \leq m(E_k) \mu(\Omega_0) + (1 - m(E_k)) \alpha \mu(\Omega_0) = \\ &= (\alpha + (1 - \alpha) m(E_k)) \mu(\Omega_0); \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь легко видеть, что (5) следует из (6) и (7).

Таким образом, для любого натурального k существует множество E_k , для которого справедливо (5) и такое, что для любого $t \in E_k$ выполняется неравенство

$$\mu(\Omega_{k,t}) > \alpha \mu(\Omega_0). \quad (8)$$

Положим $E = \limsup_{k \rightarrow \infty} E_k$. Тогда $m(E) > 0$ и, следовательно E не пусто. Возьмем некоторое $t_0 \in E$. Тогда из (2), (3) и (8) следует, что при бесконечно многих значениях k выполняется неравенство

$$\mu \left\{ \omega \in \Omega : \left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} r_i(t_0) x_i(\omega) \right\| > \lambda \sqrt{M} \right\} \geq \alpha \mu(\Omega_0), \quad (9)$$

откуда получаем, что ряд $\sum r_i(t_0) x_i(\omega)$ не является сходящимся по мере на Ω . С другой стороны безусловная сходимость по мере ряда $\sum x_i(\omega)$ эквивалентна сходимости ряда $\sum \epsilon_i x_i(\omega)$ при любом выборе знаков $\epsilon_i = \pm 1$, что противоречит неравенству (9). Теорема 1 доказана.

Заметим, что теорема 1 содержит в себе в качестве частных случаев две теоремы доказанные В. Орlichem. Это случай, когда H совпадает с действительной прямой ⁽²⁾ и случай, когда функции $x_i(\omega)$ постоянные ⁽³⁾ (см. также ⁽⁴⁾).

Следующая теорема относится к C — последовательностям по мере (см. ⁽⁵⁾, III, § 8 и ⁽⁶⁾, стр. 300).

О п р е д е л е н и е. Последовательность $\{x_i(\omega)\}$ называется C — последовательностью по мере на Ω , если для любой сходящейся к нулю последовательности чисел $\{a_n\}$ ряд $\sum a_i x_i(\omega)$ сходится по мере на Ω .

Т е о р е м а 2. Пусть $\{x_i(\omega)\}$ есть C — последовательность по мере на Ω . Тогда ряд $\sum \|x_i(\omega)\|^2$ сходится почти всюду на Ω .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\lambda_i\}$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда при любом $t \in [0, 1]$, $\lim_{i \rightarrow \infty} r_i(t) \lambda_i = 0$. Поэтому в силу условия ряд $\sum r_i(t) \lambda_i x_i(\omega)$ сходится по мере на Ω при любом $t \in [0, 1]$. Тогда из теоремы 1 следует, что ряд $\sum \|\lambda_i x_i(\omega)\|^2$ сходится почти всюду на Ω . В силу произвольности последовательности $\{\lambda_i\}$ отсюда следует, что ряд $\sum \|x_i(\omega)\|^2$ сходится почти всюду на Ω , что и требовалось.

Ереванский государственный университет

Յ. Ա. ԲԱԼԱՅԱՆ

Ներքո հետևանք Պելի — Զիգմունդի անհավասարությունից

Թող H -ն իրական կամ կոմպլեքս հիլբերտյան տարածություն է. (μ, Ω) -ն չափելի տարածություն, $\mu(\Omega) < \infty$ և x_i , $i = 1, 2, \dots$ չափելի արտադրատեսակներ են Ω -ից H .

Ապացուցված են հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 1. Նրե $\sum x_i(\omega)$ շարքն ըստ չափի ոչ պայմանական զուգամետ է Ω -ի վրա, ապա $\sum \|x_i(\omega)\|^2$ շարքը զուգամետ է համարյա ամենուրեք Ω -ի վրա:

Թեորեմ 2. Նրե $\{x_i(\omega)\}$ -ն ըստ չափի C — հաջորդականություն է Ω -ի վրա, ապա $\sum \|x_i(\omega)\|^2$ շարքը զուգամետ է համարյա ամենուրեք Ω -ի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — Г Р Ц Ц Ы П Р В П Р Ы

- 1 Ж. — П. Кахан, Случайные функциональные ряды, „Мир“, М., 1973.
- 2 W. Orlicz, *Studia Math.* 4, 27—32, (1933).
- 3 W. Orlicz, *Studia Math.* 4, 33—37, (1933).
- 4 Ф. А. Талалай, Матем. заметки, 12:3, 275—280, (1972).
- 5 S. Rolewicz, *Metric. linear spaces*, Warszawa, 1972.
- 6 W. Orlicz, *Studia Math.* 12, 286—307, (1951).