ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXII 1976 4

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

К. С. Казарян

# О мультипликативном дополнении базисных последовательностей $L_p, 1 \leqslant p < \infty$ до базисов в $L_p$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 10/III 1976)

Идея о так называемом мультипликативном дополнении системы функций принадлежит Р. Боасу и Г. Полларду ([1]). Ими установлен следующий результат:

Теорема I. *Если $\{g_n(x)\}$ — ортонормированная система, которая может быть сделана полной путем присоединения конечного числа функций, то существует измеримая ограниченная функция $m(x)$ такая, что система $\{m(x)\,g_n(x)\}$ является полной относительно $L_2$.*

Опираясь на теорему 12 работы ([2]) А. А. Талаляна, Дж. Прайс и Р. Цинк ([3]) усилили этот результат.

Теорема II. *Следующие свойства системы $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определенных на* (0, 1) *функций эквивалентны.*

(M) *Система $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в смысле сходимости по мере на* (0, 1)

(T) *Для любого положительного числа $\varepsilon$, существует измеримое множество $S_\varepsilon$, $\mu(S_\varepsilon) > 1-\varepsilon$, такое, что система $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2(S_\varepsilon)$.*

(BP) *Существует ограниченная измеримая неотрицательная функция $m(x)$ такая, что система $\{m(x)g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2[0, 1]$.*

Заметим, что эквивалентность *(M)* и *(T)* доказана в работе (2). Далее, Бен-Ами Браун ([4]), основываясь на лемму 3 работы ([2]) А. А. Талаляна, усилил результат Р. Боаса и Г. Полларада в другом направлении.

Теорема III. *Пусть $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система определенных на измеримом множестве $E \subset [0, 1]$, $\mu(E) > 0$, функций образующих нормированный базис в $L_p(E)$, $1 < p < \infty$.*

*Тогда для произвольного натурального числа $N_0$ существует измеримая функция $M$, $0 \leqslant M(x) \leqslant 1$, такая, что для любой функ-*

*ции $f$ из $L_p(E)$ существует ряд $\sum_{k=N_0}^{\infty} a_k(M\Phi_k)$, $a_k$ — действительные числа, который сходится к $f$ в метрике $L_p(E)$.*

В настоящей работе исследуется вопрос: возможно ли в условиях теоремы Бен - Ами Брауна найти такую ограниченную функцию $M$, чтобы $\{M\Phi_n\}_{n=N_0}^{\infty}$ являлась базисом в $L_p(E)$. Оказывается, что ответ на этот вопрос не однозначен. В дальнейшем понадобится следующее понятие.

Определение 1. Будем говорить, что система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определенных на измеримом множестве $E$, $\mu(E)>0$, функций имеет свойство $(A)$, на измеримом множестве $F$, $F\subset E$, $\mu(F)>0$, если существует положительное число $\alpha$ такое, что для любого натурального числа $N_1$ найдется натуральное число $N_2$ такое, что

$$\mu\left(\bigcup_{k=N_1}^{N_2} E_k\right)=\mu(F),$$

где

$$E_k=\{x;\ |\varphi_k(x)|\geqslant\alpha\}\cap F.$$

Докажем теорему, которая будет основным инструментом для получения последующих результатов.

Теорема 1. *Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — базис в $L_p(E)$, $1<p<\infty$, а $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — биортогональная ей система функций. Пусть, далее, $N$ натуральное число и $M(x)$ ограниченная функция. Для того, чтобы система $\{M(x)f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ была замкнутой минимальной системой в $L_p(E)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1. *функция $[M(x)]^{-1}\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(x)$, где $a_n$, $n=1,2,\ldots,N$, — вещественные числа, принадлежит $L_q(E)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, тогда и только тогда, когда все $a_n$ равны нулю;*
2. *для каждого $k$, $k=N+1,\ N+2,\ldots$, существуют единственные вещественные числа $a_n^{(k)}$, $n=1,2,\ldots,N$, такие, что функция*

$$\psi_k(x)=[M(x)]^{-1}\left[\sum_{n=1}^{N} a_n^{(k)}\varphi_n(x)+\varphi_k(x)\right] \qquad (*)$$

*принадлежит $L_q(E)$.*

Доказательство. Необходимость. Если

$$[M(x)]^{-1}\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(x)=g(x)\in L_q(E),$$

то ввиду того, что

$$\int_E g(x)M(x)f_k(x)dx=\int_E\left[\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(x)\right]\cdot f_k(x)dx=0,$$

при $k=N+1,\ N+2,\ldots,$ и система $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ замкнута в $L_p(E)$, получаем $a_1=a_2=\ldots=a_N=0$.

Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ биортогональная к $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ система функций. Для $k=N+1,\ N+2,\ldots;\ l=N+1,\ N+2,\ldots,$ имеем, что

$$\int_E \Psi_k(x)M(x)f_l(x)dx=\begin{cases}1, & \text{если } l=k\\ 0, & \text{если } l\neq k\end{cases}\qquad (^{**})$$

Так как $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в $L_q(E)$, то из $(^{**})$ получаем, что для каждого $k=N+1,\ N+2,\ldots$

$$\Psi_k(x)=[M(x)]^{-1}\cdot\left[\sum_{n=1}^{N}a_n^{(k)}\varphi_n(x)+\varphi_k(x)\right]\in L_q(E)$$

Единственность коэффициентов $a_n^{(k)}(n=1,2,\ldots,N;\ k=1,\ldots)$ очевидна.

Достаточность. Если существует функция $g(x)\in L_q(E)$ такая, что

$$\int_E g(x)M(x)f_n(x)dx=0,\quad n=N+1,\ N+2,\ldots,$$

то

$$g(x)M(x)=\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k(x).$$

Следовательно

$$[M(x)]^{-1}\cdot\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k(x)=g(x)\in L_q(E),$$

но из условия 1 следует, что $a_k=0;\ k=1,\ldots,N$, т. е. $g(x)=0$.

Минимальность системы $\{M(x)f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ очевидна, если учесть, что определенная равенством $(^{*})$ система $\{\Psi_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ биортогональна ей. Теорема 1 доказана.

С помощью теоремы 1 доказывается следующая.

Теорема 2. *Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ —нормированный базис в $L_p(E)$, $1<p<\infty$, который содержит ограниченную подсистему $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, а $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является биортогональной к $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ системой, состоит из ограниченных функций и $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ обладает свойством (A) на множество $F$. Тогда, если для некоторого натурального числа $N$ и для некоторой ограниченной функции $M(x)$ система $\{Mf_k\}_{k=N+1}^{\infty}$ является базисом в $L_p(E)$, то*

$$[M(x)]^{-1}\in L_q(F),\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Из теоремы 2 и теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 3. *Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ —нормированный базис в $L_p(E)$, $1<p<\infty$, который содержит ограниченную подсистему $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, а $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является биортогональной к $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ системой, состоит из ограниченных функций и $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ облада-*

*ет свойством (А) на множестве $E$. Тогда для любого натурального числа $N$ и для произвольной измеримой ограниченной функции $M(x)$ система $\{Mf_k\}_{k=N+1}^{\infty}$ не является базисом в $L_p(E)$.*

Из теоремы 3 получаются:

Следствие 1. Невозможно, выбрасывая из тригонометрической системы $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ конечное число функций, оставшуюся систему функций мультипликативно дополнить до базиса в $L_p[0, 2\pi]$, $1<p<\infty$.

Следствие 2. Невозможно, выбрасывая из системы Уолша $\{w_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ конечное число функций, оставшуюся систему функций мультипликативно дополнить до базиса в $L_p[0, 1]$.

С помощью теоремы 2 можно установить, что тем же свойством обладают системы $\{1, \cos nx\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке $[0, \pi]$.

В отличие от рассмотренных систем, если из системы Хаара выбросить произвольное конечное число функций, то оставшуюся систему функций можно мультипликативно дополнить до базиса в $L_p$, $1\leqslant p<\infty$.

Напомним определение системы Хаара $\{\chi_n(x)\}$.

Имеем:

$$\chi_0^{(0)}(x)=1 \quad (0\leqslant x\leqslant 1), \text{ а при } k=0, 1, 2, \ldots$$

$$\chi_k^{(j)}(x)=\begin{cases} \sqrt{2^k}, & \text{если } \dfrac{2j-2}{2^{k+1}}<x<\dfrac{2j-1}{2^{k+1}} \\ -\sqrt{2^k}, & \text{если } \dfrac{2j-1}{2^{k+1}}<x<\dfrac{2j}{2^{k+1}} \\ 0, & \text{если } x\notin\left[\dfrac{j-1}{2^k}, \dfrac{j}{2^k}\right], \end{cases}$$

где для каждого $k$ индекс $j$ пробегает значение $1, 2, \ldots, 2^k$. Через $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ обозначим систему Хаара, упорядоченную обычным образом:

$$\chi_0^{(0)}(x)=\chi_1(x),$$

а при $\quad n=2^k+j \quad (k=0, 1, \ldots, \quad j=1, 2, \ldots, 2^k)$

$$\chi_k^{(j)}(x)=\chi_n(x).$$

Известно, что система Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в $L_p[0, 1]$, $1\leqslant p<\infty$.

Из теоремы 1 легко следует

Лемма 1. *Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ —система Хаара. Обозначим:*

$$\Delta_k^{(1)}=\left(\frac{2m-2}{2^{k+1}}, \ \frac{2m-1}{2^{k+1}}\right), \ \Delta_k^{(2)}=\left(\frac{2m-1}{2^{k+1}}, \ \frac{2m}{2^{k+1}}\right), \ m=1, 2, \ldots, 2^k.$$

*Если $M(x)$ —ограниченная измеримая функция, то для того, чтобы система $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ была замкнутой минимальной системой в $L_p[0, 1]$, $1<p<\infty$, необходимо и достаточно существование последовательности интервалов $\Delta_0^{(i_0)}\supset\Delta_1^{(i_1)}\supset\ldots\supset\Delta_n^{(i_n)}\supset\ldots$,* *где* $l_n = \left[\frac{1}{2}\right]$ *таких, что*

$$[M(x)]^{-1} \in L_q[\Delta_n^{(l_n)}] \text{ и } [M(x)]^{-1} \in L_q[C\Delta_n^{(l_n)}],$$

*где*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \text{ и } C\Delta_n^{(l_n)}=[0,\ 1]-\Delta_n^{(l_n)},\quad n=1,\ 2,\ \ldots.$$

Теорема 4. *Пусть* $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *система Хаара. Тогда система* $\{M_0(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$, *где* $M_0(x)=2^{-n}$ *при* $x \in \left(\frac{1}{2^{n+1}},\ \frac{1}{2^n}\right)$, $n=1,\ 2,\ \ldots,$ *является базисом в* $L_p[0,\ 1]$ $1 \leqslant p < \infty$.

Наметим доказательство этого утверждения.

Из леммы 1 следует, что система $\{M_0(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ является замкнутой минимальной системой в $L_p[0,\ 1]$, $(1)<p<\infty$, но так как биортогональная ей система

$$\psi_k^{(j)}(x)=[M_0(x)]^{-1}\chi_k^{(j)}(x),\quad k=1,\ 2,\ \ldots;\ 2 \leqslant j \leqslant 2^k,$$

$$\psi_k^{(1)}(x)=[M_0(x)]^{-1}[\chi_k^{(1)}(x)-\sqrt{2^k}\,\chi_0^{(0)}(x)],$$

где $n=2^k+j$; $I \leqslant j \leqslant 2^k$, состоит из ограниченных функций, то $\{M_0(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ — замкнутая минимальная система в $L_1[0,\ 1]$. Возьмем произвольную функцию $f(x)$ из $L_p$, $(1) \leqslant p < \infty$. Легко проверить, что

$$\int_0^1 f(t)\psi_k^{(j)}(t)\,dt\cdot M_0(x)\chi_n^{(j)}(x) \equiv \int_0^1 f(t)\chi_k^{(j)}(t)\,dt \times \chi_k^{(j)}(x)$$

когда $k=1,\ 2,\ \ldots;\ 2 \leqslant j \leqslant 2^k$.

Непосредственным вычислением получаем, что сумма

$$\sum_{k=0}^{m}\int_0^1 f(t)\psi_k^{(1)}(t)\,dt \times M_0(x)\chi_k^{(1)}(x)$$

на интервалах $\left(\frac{1}{2^{j+1}},\ \frac{1}{2_j}\right)$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ m$; $m=1,\ 2,\ \ldots,$ равна

$$2^{j+1}\int_{1/2^{j+1}}^{1/2^j} f(t)\,dt$$

а на интервале $\left(0,\ \frac{1}{2^m}\right)$ равна

$$-2^{m+1}\int_{1/2^{m+1}}^{1} f(t)[M_0(t)]^{-1}dt \times M_0(x).$$

Откуда получается утверждение теоремы 4.

Замечание. Для произвольной $f(x) \in L_1(0,\ 1)$, $\sum_{n=2}^{\infty} C_n M_0(x)\chi_n(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду.

Теорема 5. *Существует ограниченная измеримая функция* $L(x)$, *такая, что* $\{L(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ *является замкнутой минимальной системой в* $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, *не являясь базисом в* $L_p[0, 1]$.

Таковой является, например, функция

$$L(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \left(\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \\ 2^{-n}, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+1}}\right], \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Заметим также, что $\{L(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ является примером гильбертовой системы, которая не является базисом в $L_2[0, 1]$.

Теорема 6. *Пусть* $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *— система Хаара, и* $N$ *произвольное натуральное число.* $(a_i, b_i)$, $1 \leq i \leq N$, *— интервалы наибольшей длины, на которых все функции* $\chi_j(x)$, $1 \leq j \leq N$ *постоянны*

$$0 = a_1 < b_1 = a_2 < \ldots < l_N = 1.$$

*Тогда система* $\{N_0(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$, *где*

$$N_0(x) = M_0\left(\frac{x-a_i}{b_i-a_i}\right) \quad \text{при } x \in (a_i, b_i),$$

$M_0(x)$ *—функция из теоремы* 4. *является базисом в* $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$.

Эта теорема вытекает из теоремы 4. Несколько более сложнее доказывается аналогичный результат для случая, когда из системы Хаара удален произвольный конечный набор функций.

Автор выражает благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляну за постановку вопросов, постоянное внимание к работе и ценные обсуждения.

Ереванский государственный университет

Գ. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

## $L_p$, $1 \leq p < \infty$-ում բազիսային հաջորդականությունների մուլտիպլիկատիվ լրացումը մինչև $L_p$-ի բազիսը

*Ուսումնասիրված է* $L_p$, $1 \leq p < \infty$, *տարածության բազիսներից վերջավոր թվով ֆունկցիաներ դուրս գցելուց հետո, մնացած ֆունկցիաների բազմությունը սահմանափակ ֆունկցիայով բազմապատկելով, բազիս ստանալու հնարավորությունը։ Նշված է, որ որոշակի պայմանների բավարարող բազիսների համար հնարավոր չէ այդ ճանապարհով բազիս ստանալ։ Ապացուցվում է, որ Հաարի սիստեմից վերջավոր թվով ֆունկցիաներ դուրս գցելուց հետո մնացած բազմությունը կարելի է մուլտիպլիկատիվորեն դարձնել բազիս* $L_p$, $1 \leq p < \infty$*-ում։ Մուլտիպլիկատիվ եղանակով կարելի է կաբերտյան բազիսի օրինակ, որը Ռիսի բազիս չէ։ Բերվում է նաև* $L_2[0,1]$ *-ում հիլբերտյան սիստեմի օրինակ, որը բազիս չէ։*

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. P. Boas, H. Pollard.*, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 518—522 (1948). [2] *A. A. Талалян*, Успехи матем. наук, 15, № 5, 77—141 (1960). [3] *J. J. Price, R. E. Zink*, Ann. Math. Ser. 2. 82 139—145, (1965). [4] *Braun Ben—Ami*, Trans. Amer. Math. Soc. 176, Febr., 499—508 (1973).