ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 4

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

Е. С. Мкртчян

О восстановлении голоморфной функции по ее значениям на некоторых множествах единственности

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/II 1976)

1°. Пусть D —звездная область относительно начала координат в пространстве $\mathbf{C}^n$ комплексных переменных $z_1, \ldots z_n$. Для $\xi^0 \in \overline{D}$, $\xi_i^0 \neq 0$, $i=1, \ldots, n$ обозначим через Δ_{ξ^0} тор:

$$\Delta_{\xi^0} = \{\xi \in \mathbf{C}^n;\ |\xi_i| = |\xi_i^0|,\ i=1, \ldots, n\}$$

Пусть, далее

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{\|k\| \geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + \|k\| \rho^{-1})} \quad (\mathrm{Re}\,\mu > 0, \rho > 0) \tag{1}$$

многомерный аналог функции типа Миттаг—Леффлера.

При $n=1$, $\mu=1$ это есть функция Миттаг—Леффлера, а при $n=1$, $\mathrm{Re}\,\mu>0$ такая функция введена М. М. Джрбашяном. Здесь $k=(k_1, \ldots, k_n)$, k_i, $i=1, \ldots, n$, целые неотрицательные числа, $\|k\| = k_1 + \ldots + k_n$, $z^k = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$, а $\Gamma(s)$ — гамма—функция.

Мы дадим аналог теоремы 3.3 Миттаг—Леффлера ([1] стр. 156) для $n>1$.

Теорема 1. *Пусть $\Delta_{\xi^0} \subset D$. Для функции f, голоморфной в D и непрерывной в $D \cup \Delta_{\xi^0}$ (если $\Delta_{\xi^0} \cap \partial D \neq \varnothing$) и любого компакта $K \subset D$:*

1) *существует число $\rho_0(k)>0$ такое, что при $\rho \geq \rho_0(k)$*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_0^\infty e^{-t} t^{\mu-1} \int_{\Delta_{\xi^0}} f(\xi) E_\rho\left(\frac{z}{\xi} t^{\frac{1}{\rho}}, \mu\right) \frac{d\xi}{\xi} dt \tag{2}$$

2)

$$f(z) = \lim_{\rho \to \infty} \frac{\Gamma(\mu)}{(2\pi i)^n} \int_{\Delta_{\xi^0}} f(\xi) E_\rho\left(\frac{z}{\xi}, \mu\right) \frac{d\xi}{\xi}, \tag{3}$$

причем предел достигается равномерно на K.

Здесь

$$\frac{d\xi}{\xi}=\frac{d\xi_1}{\xi_1}\wedge\ldots\wedge\frac{d\xi_n}{\xi_n},\quad \frac{z}{\xi}t^{\frac{1}{\rho}}=\left(\frac{z_1}{\xi_1}t^{\frac{1}{\rho}},\ldots,\frac{z_n}{\xi_n}t^{\frac{1}{\rho}}\right).$$

Функция $E_\rho(zt^{\frac{1}{\rho}},\mu)$, где $zt^{\frac{1}{\rho}}=(z_1t^{\frac{1}{\rho}},\ldots,z_nt^{\frac{1}{\rho}})$, целая функция порядка ρ, следовательно (3) показывает, что при условиях теоремы 1 функцию f во всем D как и в одном переменном ([1] стр. 159) можно равномерно приблизить целыми функциями, которые можно явно выписать.

2°. Пусть D — произвольная область в $\mathbf{C}^n$, содержащая начало координат. Многоугольник Бореля, для области D, с центром в нуле определяется следующим образом:

$$\Omega=\{z\in\mathbf{C}^n;\quad K_z\subset D\},$$

где

$$K_z=\{\xi\in\mathbf{C}^n;\ \xi=\varsigma z,\ \left|\varsigma-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2},\ \varsigma\in\mathbf{C}^1, z\in\mathbf{C}^n\}.$$

Вообще говоря, область Ω не обязана быть n — круговой областью [2]. Она содержит все полные n — круговые области с центром в нуле, которые содержатся в области D.

Вновь рассмотрим ряд (1) и положим в нем $\mu=n$ и $\rho=1$, а вместо z подставим $\frac{z}{\xi}t$. После суммирования $E_1\left(\frac{z}{\xi}t,n\right)$ получим

$$E_1\left(\frac{z}{\xi}t,n\right)=e^t t^{1-n}\xi_1\ldots\xi_n H(z,\xi,t),$$

где

$$H(z,\xi,t)=\sum_{l=1}^{n}\frac{e^{-t(1-\frac{z_l}{\xi_l})}\xi_l^{n-2}}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}(\xi_l z_j-\xi_j z_l)},$$

причем $H(z,\xi,t)$ голоморфна по z в $\mathbf{C}^n_z$, по ξ в $(\mathbf{C}^1-\{0\})^n_\xi$ и по t в $\mathbf{C}^1_t$.

Теорема 2. *Пусть $\Delta_{\xi^0}\subset\overline{\Omega}$. Если функция f голоморфна в D и непрерывна на $D\cup\Delta_{\xi^0}$ /если $\Delta_{\xi^0}\cap\partial D\neq\varnothing$/, то для $z\in\Omega$*

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_0^\infty dt\int\limits_{\Delta_{\xi^0}} f(\xi)H(z,\xi,t)d\xi, \tag{4}$$

где $d\xi=d\xi_1\wedge\ldots\wedge d\xi_n$.

Отметим, что другое интегральное представление в области Ω приведено в [2], но там интегрирование производилось по $2n$ — мерному множеству, а в формуле (4) — по $(n+1)$ — мерному.

3°. Конструктивное восстановление голоморфных функций по ее значениям на множестве единственности E* рассматривалось многими авторами. Одним из примеров является формула Галузина—Крылова ([3] стр. 105).

Пусть D — единичный круг в $\mathbf{C}^1$, E произвольное множество на окружности положительной меры Лебега. Для любой функции f, голоморфной в D и непрерывной в $\bar{D}$ и $z \in D$

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i e^{\lambda g(z)}} \int_E \frac{e^{\lambda g(\xi)} f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

где

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{\xi + z}{\xi - z} d\xi.$$

В ([4]) решена такая же задача для функций $f \in H^p$ на ∂D $(1 \leqslant p < \infty)$.

В ([5,6]) рассматриваются случаи, когда D—n —круговая область, для которой справедливо интегральное представление А. А. Темлякова ([7]) при очень специальном выборе E.

В ([8]) использован метод, примененный в ([4]) и доказано аналогичное утверждение для бицилиндра $D = \{z \in \mathbf{C}^2;\ |z_i| < 1\ i = 1, 2\}$, $E \subset \Delta_{(1,1)}$, функции $f \in H^2(\Delta_{(1,1)})$ (определение класса $H^2(\Delta_{(1,1)})$ см. в ([9]) стр. 47). Здесь E имеет положительную двумерную меру Лебега.

Пусть D — область в $\mathbf{C}^n$, $0 \in D$ и E произвольное множество положительной n — мерной меры Лебега, лежащее на $\Delta_{\xi^0} \subset \Omega$. Пусть далее функция f голоморфна в D и принадлежит $H^2(\Delta_{\xi^0})$ (если $\Delta_{\xi^0} \cap \partial D \neq \varnothing$). Тогда схема, примененная в ([8]), позволяет построить оператор L_E, который конструктивно восстанавливает функцию f в полицилиндре $U(0, |\xi^0|) = \{z \in \mathbf{C}^n;\ |z_i| < |\xi_i^0|,\ i = 1, \ldots, n\}$ по функции $h = f|_E$ (сужению f на E), т. е. для $f \in H^2(\Delta_{\xi^0})$ и $z \in U(0, |\xi^0|)$ $f(z) = L_E(h)(z)$.

С учетом этого и теоремы 1 получим

Теорема 3. *Пусть D — звездная относительно начала координат область в $\mathbf{C}^n$, $E \subset \Delta_{\xi^0} \subset \bar{D}$ имеет положительную n — мерную меру Лебега. Тогда для $f \in H^2(\Delta_{\xi^0})$ (если $\Delta_{\xi^0} \cap \partial D \neq \varnothing$) и $z \in D$*

$$f(z) = \lim_{\mu \to \infty} \frac{\Gamma(\mu)}{(2\pi i)^n} \int_{\Delta_{\xi^1}} L_E(h)(\xi) E_\mu\left(\frac{z}{\xi}, \mu\right) \frac{d\xi}{\xi},$$

где $|\xi_i^1| < |\xi_i^0|$, $i = 1, \ldots, n$.

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность своему руководителю Л. А. Айзенбергу за постоянное внимание к

---

* Множество $E \subset \bar{D}$ называется *множеством единственности*, если всякая функция, голоморфная в D, непрерывная на $D \cup E$ равная 0 на всем E, равна 0 тождественно.

работе, а также В. М. Трутневу, Ш. А. Даутову и С. М. Знаменскому за полезные обсуждения.

Институт физики им. Л. В. Киренского
г. Красноярск

Ե. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերականգնման մասին, որոշ միակության բազմությունների վրա նրա ունեցած արժեքներով

Ապացուցված է Մ. Մ. Ջրբաշյանի ((¹) էջ 156) հայտնի թեորեմի անալոգը, որտեղ ցանկացած 0 կետի նկատմամբ աստղաձև $D\subset C^n$ *տիրույթում, հոլոմորֆ ֆունկցիան վերականգնվում է ամբողջ D-ում, եթե՝*

1. Նա անընդհատ է մինչև $D\cup\Delta_{\xi^0}$ *(եթե* $\Delta_{\xi^0}\cap\partial D\neq\varnothing$*), որտեղ* $\Delta_{\xi^0}=\{\xi\in C^n;\ |\xi_i|=|\xi_i^0|,\ \xi_i^0\neq0\ i=1,\ldots,n\}\subset\overline{D}$ *և հայտնի է նրա արժեքները* Δ_{ξ^0}*-ի վրա (թեորեմ 1),*

2. հայտնի է նրա արժեքները կամայական n—չափանի Լեբեգի դրական չափի բազմության վրա, որն ընկած է Δ_{ξ^0}*-ում և երբ ֆունկցիան պատկանում է* $H^2(\Delta_{\xi^0})$ *(եթե* $\Delta_{\xi^0}\cap\partial D\neq\varnothing$*)։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966. [2] *Л. А. Айзенберг, В. М. Трутнев*, Сибирск. мат. журн., т. 12, № 6, 1398—1404 (1971). [3] *И. И. Привалов*, Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1950. [4] *D. J. Patil*, Bull. Amer. Math soc., 78, 617—620, (1972). [5] *В. П. Шеинов*, Ученые записки МОПИ им. Н. К. Крупской, т. 110, сер. мат. вып. 7, 133—139, 1962. [6] *И. И. Баврин*, ДАН СССР, т. 219, № 3, 521—524, (1974). [7] *А. А. Темляков*, „Известия АН СССР“, сер. мат., т. 21, 89—92, (1957). [8] *D. J. Patil*, Trans. Amer. Math. soc. v. 188, 97—103, (1974). [9] *У. Рудин*, Теория функций в полицилиндре, „Мир“, М., стр. 160, 1974.