ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 4

УДК 518:517.944/947

МАТЕМАТИКА

Ю. Р. Акопян

Скорость сходимости в L_2 вариационно-разностных схем для двумерных линейных параболических уравнений. Итерационное решение разностных уравнений

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 26/I 1976)

1. В области $Q=\Omega\times(0, T)$ с боковой поверхностью Γ, где Ω — ограниченная односвязная область пространства R_2 точек $(x, y)\equiv(x_1, x_2)$ с границей S из C^2, рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{2}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+au=f \tag{1}$$

с условиями

$$u|_{t=0}=0,\quad u|_{\Gamma}=0 \tag{2}$$

или

$$u|_{t=0}=0,\qquad \left(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i)+\sigma u\right)\Bigg|_{\Gamma}=0, \tag{3}$$

где ν — внешняя нормаль к S.

Предположим следующее:

$$a_{ij}\in C^{2,1}(Q),\ b_i\in C^{1,0}(Q),\ a\in C(Q),\ \sigma\in C^1(\Gamma),\ f\in L_2(Q),$$

$$0<\mu_0\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\mu_1\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2,\quad \mu_0,\ \mu_1=\mathrm{const}. \tag{4}$$

Тогда существует единственное решение $u\in W_2^{2,1}(Q)$ начально-краевых задач и имеет место оценка [1]

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)}\leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}.^{*} \tag{5}$$

Для задачи (1), (2) по области Ω определим сеточную область Ω^h (h — шаг сетки) с границей S^h, которая удовлетворяет следующим условиям [2,3]: 1) область Ω^h, ограниченная ломаной S^h содержится в

* Буквой C с индексами внизу и без них здесь и везде ниже обозначаются различные положительные постоянные в неравенствах, не зависящие от h и рядом стоящих множителей.

области Ω; 2) между точками ломаной S^h и S при помощи нормалей к S устанавливается взаимно-однозначное соответствие; 3) длины звеньев ломаной S^h ограничены снизу величиной lh; 4) расстояния точек S^h до S не превосходят величины δh^2. Далее разбиваем область Ω^h на треугольники (²), причем длины сторон треугольников лежат в пределах $[l_1 h; l_2 h]$, а площади треугольников — в пределах $[s_1 h^2; s_2 h^2]$. Положительные постоянные $l, \delta, l_1, l_2, s_1, s_2$, выбор которых обуславливается свойствами кривой S и алгоритмом построения Ω^h, не зависят от h.

Сеточная область Ω^h для задачи (1), (3) строится следующим образом: на область Ω накладывается квадратная сетка шага h, причем так, чтобы линии сетки были параллельны координатным осям; ячейки сетки разбиваются диагоналями под углом $\pi/4$ к оси x_1 на треугольники; в качестве Ω^h берется наименьшее объединение треугольников, содержащее $\overline{\Omega}$.

Совокупность вершин и сторон треугольников триангуляции образует сетку, вершины треугольников назовем узлами сетки. Будем считать, что все узлы сетки перенумерованы в некотором порядке. Каждому узлу сетки (x_m, y_m) поставим в соответствие функцию $\varphi_m(x, y)$, равную единице в узле (x_m, y_m), нулю в остальных узлах и восполненную кусочно-линейно в $\overline{\Omega^h}$. Вне $\overline{\Omega^h}$ функция φ_m тождественно равна нулю. Разобьем промежуток $[0, T]$ на равные части с шагом τ, $t_n = n\tau$, $n=0, 1, \ldots, N$. Для $n=1, \ldots, N$ определим функции

$$\varphi_{mn}(x, y, t) = \begin{cases} \varphi_m(x, y), & \text{если } t \in (t_{n-1}, t_n] \\ 0, & \text{если } t \bar{\in} (t_{n-1}, t_n]. \end{cases}$$

Линейную оболочку функций φ_{mn}, соответствующих внутренним узлам сетки (то есть не принадлежащих S^h) обозначим через $\mathring{H}_{h,\tau}$, линейную оболочку всех φ_{mn} обозначим через $H_{h,\tau}$.

Иногда аргументы x, y, t в написании функций будем опускать. Введем обозначения:

$$L_1(u, v) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_Q a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dQ + \sum_{i=1}^{2} \int_Q b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dQ + \int_Q auv dQ;$$

$$L_3(u, v) = L_1(u, v) + \int_\Gamma \sigma uv d\gamma;$$

здесь и ниже $dQ = dx dy dt$, а $d\Omega = dx dy$.

В качестве приближенного решения первой (третьей) начально-краевой задачи возьмем функцию $\bar{v} \in \mathring{H}_{h,\tau}$ (соответственно, $H_{h,\tau}$), которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\tau \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega (\bar{v}(t_n))_{\bar{t}} \bar{\varphi}(t_n) d\Omega + L_l(\bar{v}, \bar{\varphi}) = \int_Q f \bar{\varphi} dQ \qquad (6)$$

при произвольной $\bar{\varphi} \in \mathring{H}_{h,\tau}$ (соответственно, $H_{h,\tau}$), где $l=1$ для зада-

чи (1), (2) и $i=3$ для задачи (1), (3). Здесь $(\bar{v}(t_n))_{\bar{t}}$ есть $\tau^{-1}(\bar{v}(t_n)-$
$-\bar{v}(t_{n-1}))$.

Через $V_2^{1,0}(Q)$ обозначим пространство, состоящее из всех элементов $W_2^{1,0}(Q)$, имеющих конечную норму

$$|u|_Q=\sup_{0<t<T}\|u(t)\|_{L_2(\Omega)}+\||\nabla u|\|_{L_2(Q)},$$

где

$$|\nabla u|=\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right)^{1/2}.$$

Имеет место оценка скорости сходимости вариационно-разностных схем (ВРС) для задач (1), (2) и (1), (3)

$$|u-\bar{v}|_Q\leqslant Ch\|f\|_{L_2(Q)}^{*}. \tag{7}$$

В дальнейшем будем считать, что $\tau\sim h^2$.

2. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия* (4) *и оценка* (5); *тогда при достаточно малых h имеем*

$$\|u-\bar{v}\|_{L_2(Q)}\leqslant Ch^2\|f\|_{L_2(Q)}. \tag{8}$$

Опишем кратко процесс доказательства лишь для задачи (1), (2), так как для задачи (1), (3) оно проводится аналогично. Рассмотрим задачу

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right)-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i\Phi)+a\Phi=u-\bar{v},$$

$$\Phi|_{t=T}=0,\quad \Phi|_\Gamma=0.$$

Обозначим $u-\bar{v}$ через w. Для решения $\Phi\in W_2^{2,1}(Q)$ имеет место оценка (5), а именно

$$\|\Phi\|_{W_2^{2,1}(Q)}\leqslant C\|w\|_{L_2(Q)}. \tag{9}$$

Справедливо тождество

$$\|w\|_{L_2(Q)}^2=-\int_Q\frac{\partial\Phi}{\partial t}w\,dQ+L_1(w,\Phi)\equiv J. \tag{10}$$

При помощи несложных преобразований можно получить равенство

$$J=-\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_\Omega\frac{\partial\Phi}{\partial t}(u(t)-u(t_n))\,d\Omega\,dt+\tau\sum_{n=1}^{N}\int_\Omega(w(t_n))_{\bar{t}}\times$$
$$\times(\Phi(t_{n-1})-\bar{\Phi}^h(t_n))\,d\Omega+L_1(w,\Phi-\bar{\Phi}^h).$$

---

* Эта оценка получена в совместной работе Ю. Р. Акопяна и Л. А. Оганесяна, причем показано, что она предельна по порядку и при этом оптимальное τ надо брать порядка h^2.

где $\bar{\Phi}^h$ есть функция из $\mathring{H}_{h,\tau}$, совпадающая с Φ^h во внутренних узлах сетки (Φ^h—осреднение по В. А. Стеклову функции Φ по переменным x, y с шагом осреднения h). Пользуясь оценками (5), (7), (9), а также оценками

$$\|\Phi-\bar{\Phi}^h\|_Q \leqslant Ch \| \Phi \|_{W_2^{2,1}(Q)}, \quad \| \Phi-\bar{\Phi}^h \|_{L_2(Q)} \leqslant Ch^2 \| \Phi \|_{W_2^{2,1}(Q)},$$

выведенными в упомянутой выше работе, можно показать, что

$$J \leqslant Ch^2 \| f \|_{L_2(Q)} \| w \|_{L_2(Q)}.$$

Из последнего неравенства и тождества (10) следует оценка (8).

Тем же методом, как это делалось в ([3]), можно показать, что оценка (8) является точной по порядку в том смысле, что она совпадает с поперечником по А. Н. Колмогорову множества решений дифференциального уравнения в пространстве $L_2(Q)$. При этом упомянутое выше соотношение между параметрами τ и h является оптимальным.

3. В этом пункте рассмотрим метод простых итераций для решения системы линейных уравнений (6).

Считая, что задана нумерация узлов сетки, сеточную функцию $\underline{w}=\{w_m\}$, где $w_m=w(x_m, y_m)$ будем рассматривать как вектор в конечномерном пространстве R_M, где M есть число узлов сетки, имеющее порядок h^{-2}. Через $(\underline{w}, \underline{\varphi})$ будем обозначать обычное скалярное произведение в R_M.

Существуют такие матрицы P, $L_l^{(n)}$ и векторы $\underline{g}^{(n)}$, что интегральное тождество (6) эквивалентно тождеству

$$\sum_{n=1}^{N} ((P+L_l^{(n)})\underline{v}^{(n)}, \underline{\varphi}^{(n)}) = \sum_{n=1}^{N} (P\underline{v}^{(n-1)}+\underline{g}^{(n)}, \underline{\varphi}^{(n)}),$$

где, например, вектор $\underline{v}^{(n)}$ определяется значениями функции $\bar{v}(x,y,t_n)\equiv \equiv \bar{v}^{(n)}$ в узлах сетки. Ввиду произвольности φ наша задача сводится к решению N систем уравнений

$$(P+L_l^{(n)})\underline{v}^{(n)} = P\underline{v}^{(n-1)}+\underline{g}^{(n)}, \quad n=1, \ldots, N, \tag{11}$$

причем $\underline{v}^{(0)}$ есть нулевой вектор из R_M.

Для решения системы (11) при фиксированном n рассмотрим итерационный процесс

$$\lambda^{-1}E(\underline{v}_{k+1}^{(n)}-\underline{v}_k^{(n)}) = -(P+L_l^{(n)})\underline{v}_k^{(n)}+P\underline{v}_q^{(n-1)}+\underline{g}^{(n)}, \tag{12}$$

$$\lambda>0, \quad k=0, 1, \ldots, q,$$

причем в качестве начального приближения $\underline{v}_0^{(n)}$ возьмем нулевой вектор из R_M. Здесь E—диагональная матрица, определяемая в ([4]), если мы решаем задачу (1), (3) и равная h^2I (I—единичная матрица) для задачи (1), (2).

Введем в R_M норму

$$\| \underline{\varphi} \|_E = (E\underline{\varphi}, \underline{\varphi})^{1/2}.$$

Разность $\underline{v}^{(n)} - \underline{v}_k^{(n)}$ обозначим через $\underline{z}_k^{(n)}$. Пусть $\bar{v}_q$ есть функция из $\overset{\circ}{H}_{h,\tau}$, если мы рассматриваем задачу (1), (2), либо из $H_{h,\tau}$, если рассматривается задача (1), (3), такая, что $\bar{v}_q^{(n)}$ при любом $n = 1, \ldots, N$ совпадает в узлах сетки с $\underline{v}_q^{(n)}$.

Из (11) и (12) получаем

$$(P + L_1^{(n)})\underline{z}_q^{(n)} = \lambda^{-1} E(\underline{v}_{q+1}^{(n)} - \underline{v}_q^{(n)}) + P\underline{z}_q^{(n-1)}.$$

Умножая обе части последнего равенства на $\underline{z}_q^{(n)}$ и считая h достаточно малым, можно показать, что

$$(E\underline{z}_q^{(n)}, \underline{z}_q^{(n)}) \sim \left| \int_\Omega |\bar{z}_q^{(n)}|^2 d\Omega + C_1 h^2 \int_\Omega |\nabla \bar{z}_q^{(n)}|^2 d\Omega \right| \leqslant C_2 \lambda^{-2} h^{-2} \| \underline{v}_{q+1}^{(n)} - \underline{v}_q^{(n)} \|_E +$$

$$+ (1 + C_3 h^2) \left\{ \int_\Omega |\bar{z}_q^{(n-1)}|^2 d\Omega + C_1 h^2 \int_\Omega |\nabla \bar{z}_q^{(n-1)}|^2 d\Omega \right\},$$

откуда следует

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant N} \| \underline{z}_q^{(n)} \|_E \leqslant C\lambda^{-1} h^{-2} \max_{1 \leqslant n \leqslant N} (\| I - \lambda E^{-1}(P + L_1^{(n)}) \|_E^q \, \| \underline{v}_1^{(n)} \|_E). \quad (13)$$

Доказывается, что параметр λ можно выбрать так, чтобы

$$\| I - \lambda E^{-1}(P + L_1^{(n)}) \|_E \leqslant \gamma < 1, \quad (14)$$

где γ не зависит от h и n; при этом $\lambda = O(1)$.

Нетрудно вывести, принимая во внимание (5) и (7), оценку

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant N} \| \underline{v}_1^{(n)} \|_E \leqslant C(\| f \|_{L_2(Q)} + \max_{1 \leqslant n \leqslant N} \| \underline{z}_q^{(n)} \|_E). \quad (15)$$

Пусть $q > 4 \dfrac{|\ln h|}{|\ln \gamma|}$. Тогда $\gamma^q < h^4$, и из (13)—(15) следует оценка

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant N} \| \underline{z}_q^{(n)} \|_E \leqslant Ch^2 \| f \|_{L_2(Q)},$$

с помощью которой получаем

$$|\bar{v} - \bar{v}_q|_Q \leqslant Ch^{-1} \max_{1 \leqslant n \leqslant N} \| \underline{z}_q^{(n)} \|_E \leqslant Ch \| f \|_{L_2(Q)},$$

$$\| \bar{v} - \bar{v}_q \|_{L_2(Q)} \leqslant C \max_{1 \leqslant n \leqslant N} \| \underline{z}_q^{(n)} \|_E \leqslant Ch^2 \| f \|_{L_2(Q)}.$$

Итак, вспоминая оценки (7) и (8), можно утверждать, что при $q > 4 \dfrac{|\ln h|}{|\ln \gamma|}$ имеют место оценки

$$|u-\bar{v}_q|_Q \leqslant Ch\,\|f\|_{L_2(Q)}; \quad \|u-\bar{v}_q\|_{L_2(Q)} \leqslant Ch^2\,\|f\|_{L_2(Q)}.$$

При этом объем работы, затраченной для нахождения $\bar{v}_q$ имеет порядок $h^{-4}|\ln h|$.

Ленинградский институт социально-экономических
проблем Академии наук СССР

ՅՈՒ. Ռ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Երկու չափանի գծային պարաբոլիկ հավասարումների համար վարիացիոն-տարբերական սխեմայի զուգամիտության արագությունը L_2 տարածությունում: Տարբերական հավասարումների իտերացիոն լուծումը

Հոդվածում գծային պարաբոլիկ հավասարումների համար կառուցվում են վարիացիոն-տարբերական սխեմաներ երկու չափանի տիրույթում։ Ցույց է տրվում, որ L_2 տարածությունում սխեմաների զուգամիտության արագությունը h^2 կարգի է, եթե $\tau\sim h^2$ (որտեղ h ցանցի քայլն է ըստ տարածողական փոփոխականի, իսկ τ ըստ ժամանակի)։

Ապացուցվում է պարզ իտերացիոն մեթոդի զուգամիտությունը և ցույց է տրվում իտերացիաների թիվը, տրված ճշտությամբ լուծումը գտնելու համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., «Наука», 1967. [2] *Л. А. Огинесян*, Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 6, № 6, 1024—1042 (1966). [3] *Л. А. Оганесян, В. Я. Ривкинд, Л. А. Руховец*, Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, часть I. Сб. «Дифференциальные уравнения и их применение», вып. 5, Вильнюс, 1973. [4] *Г. П. Астраханцев*, Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 11, № 1, 105—120 (1971).