

УДК 539.3

МЕХАНИКА

А. Г. Галоян, А. А. Хачатрян

Поперечный изгиб балок, изготовленных из
 разномодульного материала

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 19/XI 1975)

В работе делается попытка построения теории поперечного изгиба балки с прямоугольным поперечным сечением, изготовленной из разномодульного материала. Наряду с общепринятыми упрощениями, использованными при построении теории изгиба балок, пластинок и оболочек из обычного изотропного или анизотропного материала, учитывающей влияние поперечных сдвигов, здесь производится также в некотором смысле линеаризация сложных, нелинейных зависимостей законов упругости. В результате этого получены необходимые уравнения и соотношения поставленной задачи. Разобраны всевозможные случаи, связанные со специфической особенностью разномодульного материала.

1. Рассмотрим балку с прямоугольным поперечным сечением, изготовленную из разномодульного материала. Выберем прямоугольную систему координат, направив ось x по оси балки, ось y — по ширине и ось z — по высоте поперечного сечения, образующих правую систему. Действующие на балку силы расположены в плоскости xz и изгиб балки происходит в этой же плоскости.

Из компонентов напряжения отличными от нуля будут $\sigma_x(x, z)$, $\sigma_z(x, z)$ и $\tau_{xz}(x, z)$. В законах упругости ⁽¹⁾ пренебрегая напряжением σ_z по сравнению с другими напряжениями, после некоторых преобразований будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \sigma - \frac{a_{22} - a_{11}}{2} \frac{\sigma^2 + 2\tau^2}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{dw}{dx} = (a_{11} + a_{22} - 2a_{12})\tau - (a_{22} - a_{11}) \frac{\sigma\tau}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}, \quad (1.2)$$

где $u(x, z)$, $w = w(x)$ — перемещения по направлению x и z соответственно:

$$a_{11} = 1/E^+, \quad a_{22} = 1/E^-, \quad a_{12} = -\nu^+/E^+ = -\frac{\nu^-}{E^-} \quad (1.3)$$

E^+ , ν^+ и E^- , ν^- — модуль упругости и коэффициент Пуассона при растяжении и сжатии соответственно.

Действующие в поперечном сечении балки напряжения σ и τ вызывают изгибающий момент M и перерезывающую силу Q , между которыми и интенсивностью поперечной нагрузки q существуют известные дифференциальные зависимости

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{dQ}{dx} = -q. \quad (1.4)$$

Отметим, что законы упругости (1.1) и (1.2) представляют достаточно сложные нелинейные связи между напряжениями и деформациями, без упрощения которых вряд ли можно будет получить хотя бы какие-либо удовлетворяющие результаты. В связи с этим напомним, что в классической теории изгиба для обычного (одномодульного $a_{11} = a_{22}$) материала уравнения (1.2) вообще не удовлетворяется. Оно более или менее удовлетворяется в уточненных теориях изгиба, учитывающих влияние поперечных сдвигов (^{2,3}). Причем известно, что учет поперечных сдвигов дает поправку к результатам классической теории порядка h^2/l^2 по сравнению с единицей и, как показано в (³), выбор того или иного разумного закона распределения касательных напряжений по толщине не играет существенной роли. Учитывая вышесказанное, а также принимая во внимание количественное превосходство первого слагаемого уравнения (1.2) над вторым, мы здесь ограничимся частичным удовлетворением уравнения (1.2), а именно — в уравнении (1.2) будем пренебрегать нелинейной частью, рассмотрев взамен этого следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{dw}{dx} = (a_{11} + a_{22} - 2a_{12})z, \quad (1.5)$$

Далее заменим нормальное напряжение σ в нелинейной части уравнения (1.1) выражением σ_0 , являющимся соответствующим результатом при чистом изгибе (⁴)

$$\sigma_0 = \frac{12M}{bh^3(1-\eta)^2} \left(z - \frac{h}{2}\eta \right) \quad \text{при} \quad \frac{h}{2}\eta \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.6)$$

$$\sigma_0 = \frac{12M}{bh^3(1+\eta)^2} \left(z - \frac{h}{2}\eta \right) \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\eta$$

где

$$\eta = \frac{\sqrt{a_{22}} - \sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{22}} + \sqrt{a_{11}}}. \quad (1.7)$$

Отметим, что выражения (1.6) и (1.7) соответствуют случаю, когда $M > 0$ и $a_{22} > a_{11}$. Пока продолжим рассмотрение этого случая, а в дальнейшем разберем также и остальные возможные случаи.

Исходя из уравнения равновесия и принимая, что нормальное на-

пряжение определяется согласно (1.6), для касательного напряжения, удовлетворяющего условию $\tau(\pm h/2) = 0$, получим:

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3(1-\eta)^2} \left[\frac{h^2}{4} (1-\eta)^2 - \left(z - \frac{h}{2} \eta \right)^2 \right] \quad \text{при} \quad \frac{h}{2} \eta \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.8)$$

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3(1+\eta)^2} \left[\frac{h^2}{4} (1+\eta)^2 - \left(z - \frac{h}{2} \eta \right)^2 \right] \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \eta.$$

Рассмотрим теперь входящее в (1.1) нелинейное выражение как функцию от координаты z

$$f(z) = \frac{\sigma_0^2 + 2\tau^2}{\sqrt{\sigma_0^2 + 4\tau^2}}, \quad (1.9)$$

где σ_0 и τ определяются согласно (1.6) и (1.8). На основании исследования, на фиг. 1 показан примерный вид графика функции $f(z)$,

когда $|\tau(h/2 - \eta)| - \frac{\sqrt{6}}{4} \sigma_0 \left(\frac{h}{2} \right) < 0$, а на фиг. 2 — когда $|\tau \left(\frac{h}{2} - \eta \right)| -$

$-\frac{\sqrt{6}}{4} \sigma_0 \left(\frac{h}{2} \right) > 0$. Приведены также эпюры нормального $|\sigma_0|$ и касательного $|\tau|$ напряжений.

Отметим, что эпюры нормального напряжения $|\sigma_0|$ в точках $z = \pm h/2$ касаются кривой $f(z)$.

Имея достаточно ясное представление о функции $f(z)$, мы допускаем возможность замены ее линейными функциями в каждом из рассмотренных интервалов переменной z . При этом каждая из этих линейных функций представляет собой прямую, соединяющую крайние точки кривой $f(z)$ данного интервала. Эти прямые показаны на рис. 1 и 2 пунктирными линиями.

Таким образом, функцию $f(z)$ (1.9), которая конечно является функцией также и по переменной x , заменяем следующими ломаными

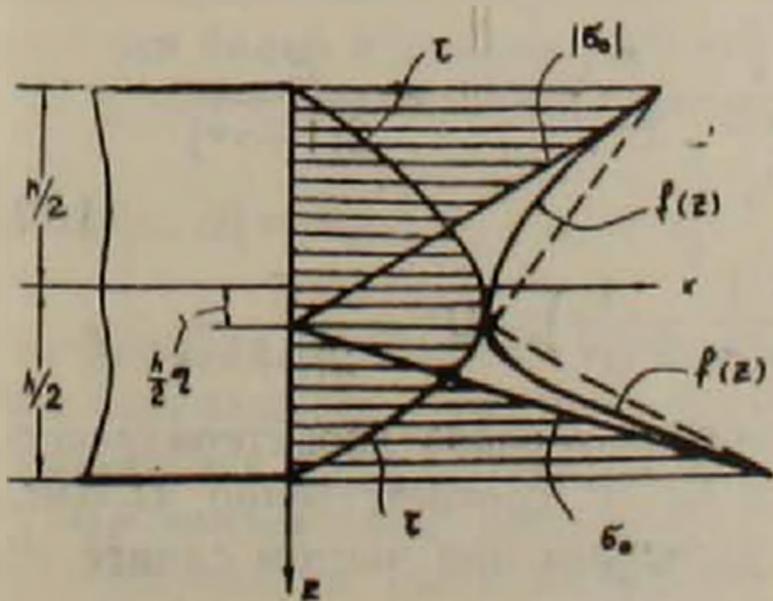


Рис. 1

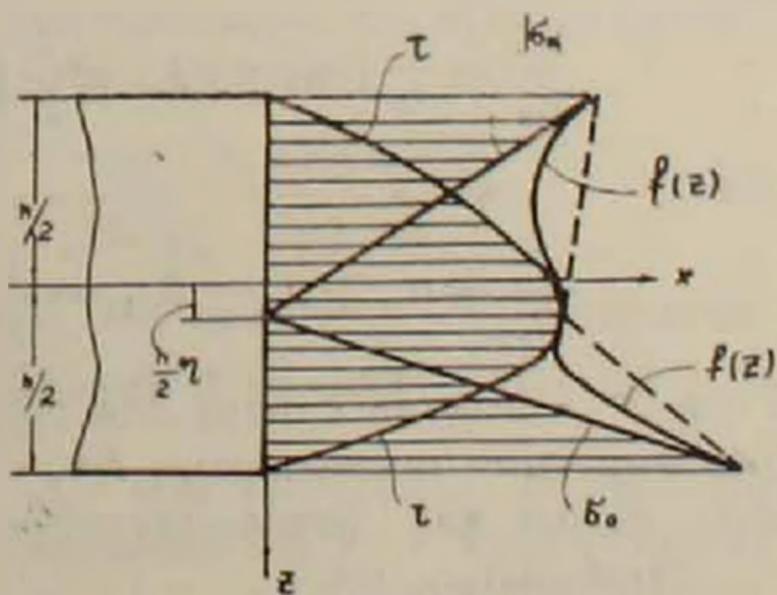


Рис. 2

$$f_1(x, z) = \frac{12|M|}{bh^3(1-\eta)^2} \left(z - \frac{h}{2} \eta \right) + \frac{3|Q|}{bh^2(1-\eta)} \left(\frac{h}{2} - z \right) \text{ при } \frac{h}{2} \eta \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.10)$$

$$f_2(x, z) = \frac{12|M|}{bh^3(1+\eta)^2} \left(\frac{h}{2} \eta - z \right) + \frac{3|Q|}{bh^2(1+\eta)} \left(\frac{h}{2} + z \right) \text{ при } -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \eta.$$

Учитывая, что функция (1.9) всегда положительная, хотя пока рассматривается случай $M > 0$, для исключения возможной путаницы, здесь берется M со знаком абсолютной величины.

Отметим, что такая замена в количественном отношении вряд ли сможет вызвать существенные отклонения в результатах, а с другой стороны приводит к существенным упрощениям дальнейших выкладок.

После приведенных выше упрощений законы упругости представим в виде

$$\text{при } \frac{h}{2} \eta \leq z \leq \frac{h}{2}$$

$$\sigma_1 = E_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{22} + a_{11}} \left[\frac{12|M|}{bh^3(1-\eta)^2} \left(z - \frac{h}{2} \eta \right) + \frac{3|Q|}{bh^2(1-\eta)} \left(\frac{h}{2} - z \right) \right], \quad (1.11')$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{dw}{dx} = \frac{6Q}{bh^3(1-\eta)^2 G_0} \left[\frac{h^2}{4} (1-\eta)^2 - \left(z - \frac{h}{2} \eta \right)^2 \right],$$

$$\text{при } -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \eta$$

$$\sigma_2 = E_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{22} + a_{11}} \left[\frac{12|M|}{bh^3(1+\eta)^2} \left(\frac{h}{2} \eta - z \right) + \frac{3|Q|}{bh^2(1+\eta)} \left(\frac{h}{2} + z \right) \right], \quad (1.11'')$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{dw}{dx} = \frac{6Q}{bh^3(1+\eta)^2 G_0} \left[\frac{h^2}{4} (1+\eta)^2 - \left(z - \frac{h}{2} \eta \right)^2 \right],$$

где

$$\frac{1}{E_0} = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E^+} + \frac{1}{E^-} \right), \quad G^+ = \frac{E^+}{2(1+\nu^+)} \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{G_0} = a_{11} + a_{22} - 2a_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G^+} + \frac{1}{G^-} \right), \quad G^- = \frac{E^-}{2(1+\nu^-)}$$

G^+ и G^- — модули сдвига для обычного материала характеризующегося упругими постоянными E^+ , ν^+ и E^- , ν^- соответственно; G_0 — модуль сдвига для разномодульного материала при чистом сдвиге (1).

Любопытно, что

$$G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}, \quad \frac{1}{\nu_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nu^+} + \frac{1}{\nu^-} \right), \quad (1.13)$$

т. е. между величинами E_0 , G_0 и ν_0 существует такая же связь, что и при обычном материале для соответствующих величин.

Из вторых уравнений (1.11) вычисляем $u_1(x, z)$, $u_2(x, z)$ и учитывая, что при $z = \frac{h}{2} \eta$ $u_1\left(x, \frac{h}{2} \eta\right) = u_2\left(x, \frac{h}{2} \eta\right) = u_0(x)$, получаем

$$u_1(x, z) = u_0 - \left(z - \frac{h}{2} \eta\right) \frac{d\omega}{dx} + \frac{6Q}{bh^3(1-\eta)^2 G_0} \left[\frac{h^2}{4} (1-\eta)^2 \left(z - \frac{h}{2} \eta\right) - \frac{1}{3} \left(z - \frac{h}{2} \eta\right)^3 \right], \quad (1.14)$$

$$u_2(x, z) = u_0 - \left(z - \frac{h}{2} \eta\right) \frac{d\omega}{dx} + \frac{6Q}{bh^3(1+\eta)^2 G_0} \left[\frac{h^2}{4} (1+\eta)^2 \left(z - \frac{h}{2} \eta\right) - \frac{1}{3} \left(z - \frac{h}{2} \eta\right)^3 \right].$$

Подставляя значения u_1 и u_2 из (1.14) в первые уравнения (1.11) и умножая их сначала на $bzdz$, затем и на bdz , после интегрирования в соответствующих пределах и некоторых преобразований, при учете отсутствия осевого усилия, окончательно получаем

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = -\frac{12M}{bh^3 E_0} - \frac{3(8-\eta^2)q}{20bhG_0} + (a_{22} - a_{11}) \frac{3\eta}{bh^3} \left(|M| + \frac{|Q|h}{4} \right), \quad (1.15)$$

$$\frac{du_0}{dx} = \frac{6\eta M}{bh^2 E_0} - \frac{\eta(1+3\eta^2)q}{40bG_0} - (a_{22} - a_{11}) \frac{3(1+\eta^2)}{2bh^2} \left(|M| + \frac{|Q|h}{4} \right). \quad (1.16)$$

Последние слагаемые в правых частях выражений (1.15) и (1.16) представляют результат учета нелинейного выражения в законе упругости (1.1), после его упрощения и представления в виде (1.10).

Таким образом, получено основное дифференциальное уравнение поперечного изгиба (1.15), а также уравнение (1.16), с помощью которого по формулам (1.14) можно определить перемещение любой точки балки в продольном направлении. В частности, продольное перемещение точек оси балки в данном случае (в предположении, что $M > 0$ и $a_{22} > a_{11}$, т. е. $\eta > 0$) будет определяться по следующей формуле:

$$u(x, 0) = u_2(x, 0) = u_0 + \frac{\eta h}{2} \frac{d\omega}{dx} - \frac{\eta Q}{4bG_0} \frac{3 + 6\eta + 2\eta^2}{(1+\eta)^2}. \quad (1.17)$$

Эта формула необходима в том смысле, что при определении продольного перемещения граничные условия будут накладываться именно на перемещения точек оси балки.

Из приведенных здесь результатов, при отсутствии поперечных сил, получаются соответствующие результаты чистого изгиба балки, изготовленной из разномодульного материала (*). Если же в уравнении (1.15) примем $a_{22} = a_{11}$, то получим уточненное уравнение изгиба

балки из обычного изотропного материала, учитывающего влияние поперечных сдвигов в постановке С. А. Амбарцумяна (2).

2. В предыдущем пункте рассуждение велось в предположении, что $M > 0$ и $a_{22} > a_{11}$. Рассматривая другие возможные случаи, нетрудно установить, что знак величины η (1.7) тесно связан со знаком изгибающего момента M . А именно:

$$\eta = \eta_1 = \frac{\sqrt{a_{22}} - \sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{22}} + \sqrt{a_{11}}} \quad \text{при } M > 0 \quad (2.1)$$

$$\eta = \eta_2 = \frac{\sqrt{a_{11}} - \sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11}} + \sqrt{a_{22}}} \quad \text{при } M < 0 \quad (2.2)$$

С учетом этого приведем основные уравнения и соотношения поперечного изгиба балки, в зависимости от знака изгибающего момента.

а) Случай $M > 0$ ($\eta = \eta_1$).

При этом уравнения (1.15) и (1.16) преобразуются к виду

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = -M + \eta_1^2 \frac{|Q|h}{4} - \frac{3(8 - \eta_1^2)qD}{20bhG_0}, \quad (2.3)$$

$$\frac{du_0}{dx} = -\eta_1 \left(\frac{1 + 3\eta_1^2}{40bG_0} q + \frac{3|Q|}{2bhE_0} \right), \quad (2.4)$$

где

$$D = \frac{bh^3}{3} (\sqrt{a_{11}} + \sqrt{a_{22}})^{-2} \quad (2.5)$$

представляет собой жесткость балки при изгибе.

На основании имеющихся выше формул можно было привести соответствующее выражение для нормального напряжения, на чем останавливаться не будем.

При определении продольного перемещения точек оси балки следует обратить внимание на знак величины η_1 :

$$\begin{aligned} & \text{при } \eta_1 > 0 \quad (a_{22} > a_{11}) \\ u(x, 0) = u_2(x, 0) = u_0 + \frac{\eta_1 h}{2} \frac{dw}{dx} - \frac{\eta_1 Q}{4bG_0} \frac{3 + 6\eta_1 + 2\eta_1^2}{(1 + \eta_1)^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \text{при } \eta_1 < 0 \quad (a_{22} < a_{11}) \\ u(x, 0) = u_1(x, 0) = u_0 + \frac{\eta_1 h}{2} \frac{dw}{dx} - \frac{\eta_1 Q}{4bG_0} \frac{3 - 6\eta_1 + 2\eta_1^2}{(1 - \eta_1)^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

б) Случай $M < 0$ ($\eta = \eta_2$).

В этом случае из (1.15) и (1.16) имеем:

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = -M - \eta_2^2 \frac{|Q|h}{4} - \frac{3(8 - \eta_2^2)qD}{20bhG_0}, \quad (2.8)$$

$$\frac{du_0}{dx} = -\eta_2 \left(\frac{1 + 3\eta_2^2}{40bG_0} q - \frac{3|Q|}{2bhE_0} \right). \quad (2.9)$$

Продольное перемещение точек оси балки зависит от знака величины η_2 и определяется следующим образом:

при $\eta_2 > 0$ ($a_{22} < a_{11}$)

$$u(x, 0) = u_2(x, 0) = u_0 + \frac{\eta_2 h}{2} \frac{dw}{dx} - \frac{\eta_2 Q}{4bG_0} \frac{3 + 6\eta_2 + 2\eta_2^2}{(1 + \eta_2)^2} \quad (2.10)$$

при $\eta_2 < 0$ ($a_{22} > a_{11}$)

$$u(x, 0) = u_1(x, 0) = u_0 + \frac{\eta_2 h}{2} \frac{dw}{dx} - \frac{\eta_2 Q}{4bG_0} \frac{3 - 6\eta_2 + 2\eta_2^2}{(1 - \eta_2)^2} \quad (2.11)$$

Таким образом, построена теория поперечного изгиба балок, изготовленных из разномодульного материала при отсутствии внешних продольных сил, и, кроме того, считается, что граничные условия задачи являются такими, при которых в балке не появляются продольные усилия.

В заключение следует отметить, что при решении конкретных примеров необходимо обратить внимание на поперечную силу Q , входящую в некоторые уравнения со знаком абсолютной величины. Это обстоятельство, очевидно, в некоторых случаях может вызвать дополнительные, однако не принципиальные трудности.

Ереванский политехнический институт
Институт механики Академии наук Армянской ССР

Ա. Հ. ՎԱՆՅԱՆ, Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Տարամոդուլ նյութից պատրաստված հեծանների ծոուր

Աշխատանքը նվիրված է տարամոդուլ նյութից պատրաստված հեծանների ընդլայնական ծոման հարցին: Այստեղ, բացի հանրահայտ պարզեցումներից, որոնք ընդունված են սովորական նյութից պատրաստված հեծանների, սալերի և թաղանթների ծոման տեսություններ կառուցելու համար, կատարված է նաև բարդ, ոչ դժային առանձգականության օրենքների գծայնացում: Արդյունքում դիտարկվող խնդրի համար ստացվել են անհրաժեշտ առնչությունները և հավասարումները:

ЛИТЕРАТУРА — ՎՐԱԿԱՆՈՒՄՆԵՐ

¹ С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян, Изв. ж. МТТ, № 2 (1966). ² С. А. Амбарцумян, Теория анизотропных оболочек, Физматгиз, 1961. ³ С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер, Пластинки и оболочки, Госиздат, М., 1963. ⁴ А. А. Хачатрян, «Известия АН Арм. ССР», Механика, т. XXV, № 1 (1972).