ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 3

УДК 01.01.01

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

О крайних точках некоторых множеств голоморфных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 30/I 1976)

Пусть D—единичный круг $|z|<1$; K—выпуклый компакт на плоскости w; $H^\infty(D)$—пространство голоморфных и ограниченных в D функций; $H^\infty(D; K)$—множество функций $f(z)\in H^\infty(D)$, для которых $f(D)\subset K$. Очевидно, $H^\infty(D; K)$ является выпуклым множеством в $H^\infty(D)$. Каковы крайние точки этого множества? В случае, когда K—круг $|w|\leq 1$, т. е. $H^\infty(D; K)$ является единичным шаром в $H^\infty(D)$, крайними точками, как известно, ([1], стр. 197) являются те и только те функции, которые удовлетворяют условию

$$\int_0^{2\pi}\log(1-|f(e^{i\theta})|)d\theta=-\infty. \tag{1}$$

Целью настоящей работы является описание крайних точек множества $H^\infty(D; K)$ для довольно широкого класса выпуклых компактов K, а именно, для компактов, удовлетворяющих условию (A): *граница* (∂K) *компакта* К *в каждой своей точке имеет соприкосновение порядка не выше* $n-1$ (n—*четное число*) *с опорной прямой*. Напомним, что опорной к данному множеству K в данной точке $\zeta\in K$ называется прямая, проходящая через ζ и оставляющая K по одну сторону от себя.

В работе ([2]) описаны крайние точки множества $H^\infty(D, K)$ для компактов, удовлетворяющих некоторому условию, которое, как легко показать, эквивалентно условию (A) при $n=2$.

На множестве K определим неотрицательную функцию

$$G(w)=\sup\{|\zeta|: w\pm\zeta\in K\},\quad w\in K. \tag{2}$$

Обозначим через $\rho(w, \partial K)$ расстояние между w и ∂K, т. е.

$$\rho(w, \partial K)=\inf_{t\in\partial K}|w-t|.$$

Лемма. *Для выпуклых компактов* K, *удовлетворяющих условию* (A), имеет место неравенство

$$G(w) \leqslant C \cdot \rho^{1/n}(w, \partial K), \quad w \in K, \tag{3}$$

где C от w не зависит.

Доказательство. Из условия (A) следует, что для каждой точки $\zeta \in \partial K$ и опорной прямой l, проходящей через ζ, существует окрестность D_ζ этой точки и парабола четного порядка n с вершиной ζ и с касательной l так, что ветви этой параболы охватывают множество $K \cap D_\zeta$. Множество $K' = K \setminus (\bigcup_{\zeta \in \partial K} D_\zeta)$ компактно внутри K, т. е. $\rho(K', \partial K) > 0$. Ввиду того, что K—компакт, из определения (2) следует, что функция $G(w)$ ограничена некоторой константой M, $G(w) \leqslant M$. Пусть $C = \max \{1; M \cdot \rho^{-\frac{1}{n}}(K', \partial K)\}$. Для $w \in K'$ имеем

$$G(w) \leqslant M \leqslant C \cdot \rho^{1/n}(K', \partial K) \leqslant C \cdot \rho^{1/n}(w, \partial K). \tag{4}$$

В случае же $w \in K \setminus K'$ выберем $\zeta_0 \in \partial K$ так, чтобы

$$\rho(w, \partial K) = \rho(w, \zeta_0). \tag{5}$$

Опорная прямая к компакту K через точку ζ_0, очевидно, перпендикулярна к прямой d, соединяющей точки w и ζ_0, иначе на ∂K существовали бы точки, расположенные к w ближе, чем ζ_0, что противоречило бы (5). Проведя соответствующую параболу порядка n с осью d и с вершиной ζ_0, убеждаемся, что

$$G(w) \leqslant |w - \zeta|^{1/n} = \rho^{1/n}(w, \partial K). \tag{6}$$

Объединяя (4) и (6), получаем утверждение леммы (3) для всех точек $w \in K$.

Теорема. *Пусть K—выпуклый компакт, удовлетворяющий условию (A). Для того, чтобы функция $f(z)$ являлась крайней точкой множества $H^\infty(D; K)$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_0^{2\pi} \log \rho(f(e^{i\theta}), \partial K) d\theta = -\infty. \tag{7}$$

Необходимость. Пусть интеграл в левой части (7) сходится. Функция

$$h(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log \rho(f(e^{i\theta}), \partial K)\, d\theta \right\}$$

голоморфна и ограничена в круге D и почти всюду $|h(e^{i\theta})| = \rho(f(e^{i\theta}), \partial K)$. Отсюда следует, что $f(e^{i\theta}) \pm h(e^{i\theta}) \in K$ почти всюду, поэтому $f(z) \pm h(z) \in K$, $z \in D$. Поскольку $h(z) \not\equiv 0$, это значит, что $f(z)$ не является крайней точкой.

Достаточность. Пусть $g(z)$ голоморфна в D и $f(z) \pm g(z) \in K$. В силу определения (2) функции $G(w)$ имеем $|g(z)| \leqslant G(f(z))$. Учитывая (3), получим

$$|g(e^{i\theta})| \leqslant G(f(e^{i\theta})) \leqslant C \cdot \rho^{1/n}(f(e^{i\theta}), \partial K).$$

Логарифмируя и интегрируя полученное неравенство, с учетом (7) будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \log|g(e^{i\theta})|\,d\theta \leqslant \log C + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \log\rho(f(e^{i\theta}),\ \partial K)\,d\theta = -\infty.$$

Отсюда следует, что $g(z)\equiv 0$, т. е. $f(z)$ является крайней точкой множества $H^\infty(D; K)$.

Заметим, что в случае, когда K—круг, $\rho(f(e^{i\theta}),\ \partial K) = 1 - |f(e^{i\theta})|$ и условие (7) сводится к условию (1).

Ереванский государственный университет

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Հոլոմորֆ ֆունկցիաների որոշ բազմությունների էքստրեմալ կետերի մասին

Դիցուք D-ն միավոր շրջանն է, K-ն կոմպակտ և ուռուցիկ բազմություն է հարթության վրա, $H^\infty(D; K)$-ով նշանակենք այն բոլոր ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք արտապատկերում են D-ն K-ի մեջ։ $H^\infty(D; K)$-ն D-ում հոլոմորֆ ու սահմանափակ ֆունկցիաների տարածությունում կազմում է ուռուցիկ բազմություն։ Հոդվածում նկարագրված են $H^\infty(D; K)$ բազմության էքստրեմալ կետերը, երբ K-ն բավարարում է որոշ պայմանների։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. Гофман*, Банаховы пространства аналитических функций. ИЛ, М., 1963.
[2] *H. M. Hilden*, Duke Math. J., vol. 37, 715—723 (1970).