УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян, Н. С. Земляной

Асимптотический анализ системы $GI/G/r/n-r$
 в условиях малой загрузки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 30/XII 1975)

1. Работы (1-3) А. Д. Соловьева и его учеников положили начало новому направлению в теории надежности и теории массового обслуживания.

В настоящей работе получено несколько результатов для системы $GI/G/r/n-r$, обобщающих результаты (3).

Пусть промежутки времен между соседними поступлениями вызовов в совокупности независимы и одинаково распределены с функцией распределения (ф. р.) $A(t)$, $A(+0) = 0$. Длительности обслуживания вызовов в совокупности независимы, не зависят от процесса поступления и имеют ф. р. $B(t)$, $B(+0) = 0$.

Нас интересует асимптотическое распределение момента первой потери вызова τ при „быстром“ обслуживании.

Процесс $\xi(t)$ числа вызовов в системе в момент t является регенерирующим. Точки регенерации — моменты начал периодов занятости (п. з.), т. е. моменты поступления вызовов в свободную систему.

Если ξ_1 — длина п. з., а ξ_2 — последующий промежуток отсутствия в системе вызовов, то $\xi = \xi_1 + \xi_2$ есть период регенерации (п. р.). Случайные величины (сл. в.) ξ_1 и ξ_2 зависимы.

Определим события: $D(u) = \{ \text{в момент } \xi_1 \text{ с последнего момента поступления вызова прошло время } u \}, u \geq 0$. Зададим сл. в. ξ_{1u} и ξ_{2u} следующим образом:

$$\xi_{1u} = \xi_1 \text{ при условии } D(u);$$

$$P\{\xi_{2u} < t\} \stackrel{\text{def}}{=} P\{\xi_2 < t | D(u)\} = \frac{A(t+u) - A(u)}{1 - A(u)} \stackrel{\text{def}}{=} A_u(t).$$

Если при условии $D(u)$ $\bar{q}(u)$ есть вероятность потери вызова на ξ_1 и $P\{D(u)\} \stackrel{\text{def}}{=} dp(u)$, то

$$q = \int_0^{\infty} \bar{q}(u) dp(u), \tag{1}$$

где q — вероятность потери вызова на одном п. р.

2. Ниже докажем вспомогательную теорему. Рассмотрим регенерирующий процесс $\xi(t)$ и $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$ — последовательные моменты регенерации, а $\xi_n = t_n - t_{n-1}$ — длина n -го п. р.

$$\xi_n = \xi_{n1} + \xi_{n2},$$

где ξ_{n1} с вероятностью $dp(u) (u \geq 0)$ равны ξ_{n1}^u ($\int dp(u) = 1$). Далее

$$P\{\xi_{n2} < t / \xi_{n1} = \xi_{n1}^u\} \stackrel{\text{def}}{=} P\{\xi_{n2}^u < t\} = A_u(t).$$

Предполагаем, что при каждом фиксированном $u \geq 0$ $\{\xi_{n1}^u\}_{n \geq 1}$ — одинаково распределены.

На n -ом п. р., причем только на ξ_{n1} , может появиться событие A_n . Пусть η_n — момент появления события A_n , отсчитываемый с момента t_{n-1} ($\eta_n \leq \xi_{n1}$), а A_n и η_n определены на классе траекторий $\{\xi(t); t_{n-1} < t \leq t_{n-1} + \xi_{n1}\}$ и не зависят от номера n п. р. Поэтому можно говорить о событии A .

Пусть $\bar{q}(u)$ и q — вероятности появления события A на ξ_{1u} и ξ_1 соответственно. Тогда верна формула (1).

Обозначим через τ момент первого появления события A , а через a^{-1} безусловное математическое ожидание сл. в. ξ_{n2}

$$a^{-1} = \int_0^\infty a_u^{-1} dp(u) < \infty, \quad (2)$$

где

$$a_u \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_0^\infty t dA_u(t) \right)^{-1} \quad (0 \leq u < \infty). \quad (3)$$

Теорема. Если $T = M\xi_{n1}$,

$$\text{то } \lim_{\substack{aT \rightarrow 0 \\ q \rightarrow 0}} P\{aq\tau > x\} = e^{-x}, \quad x \geq 0. \quad (4)$$

Доказательство. Если χ_u — индикатор события A на ξ_1^u , то положим

$$\xi_u = \xi_1^u \cdot (1 - \chi_u) + \eta \chi_u; \quad \psi_u^-(z) = Me^{-z\xi_u} \cdot \chi_u;$$

$$\psi^u(z) = Me^{-z\xi_u}.$$

Введением дополнительного события выводится выражение для $Me^{-z\tau}$, которое после замены z на $\bar{z} = aqz$, примет вид

$$Me^{-\bar{z}\tau} =$$

$$q^{-1} \int_0^\infty \psi_u^-(\bar{z}) dp(u)$$

$$= \frac{q^{-1} \int_0^\infty \psi_u^-(\bar{z}) dp(u)}{q^{-1} \int_0^\infty (1 - a_u(\bar{z})) dp(u) + q^{-1} \int_0^\infty (1 - \psi^u(\bar{z})) a_u(\bar{z}) dp(u) + q^{-1} \int_0^\infty \psi_u^-(\bar{z}) a_u(\bar{z}) dp(u)}, \quad (5)$$

где

$$\alpha_u(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dA_u(t).$$

Оценим числитель и слагаемые знаменателя правой части (5).

$$\begin{aligned} 0 &\leq q^{-1} \int_0^{\infty} (1 - \psi_u^{\#}(\bar{z})) \alpha_u(\bar{z}) dp(u) \leq q^{-1} \int_0^{\infty} M(1 - e^{-z \xi_u}) dp(u) \leq \\ &\leq az \int_0^{\infty} M \xi_u dp(u) \leq az T. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично выводятся оценки

$$0 \leq 1 - q^{-1} \int_0^{\infty} \psi_u^{\#}(\bar{z}) dp(u) \leq az T; \quad (7)$$

$$0 \leq \int_0^{\infty} \alpha_u(\bar{z}) dp(u) - q^{-1} \int_0^{\infty} \psi_u^{\#}(\bar{z}) \alpha_u(\bar{z}) dp(u) \leq az T. \quad (8)$$

При $az \rightarrow 0$ из (6), (7) заключаем

$$q^{-1} \int_0^{\infty} (1 - \psi_u^{\#}(\bar{z})) \alpha_u(\bar{z}) dp(u) \sim 0, \quad q^{-1} \int_0^{\infty} \psi_u^{\#}(\bar{z}) dp(u) \sim 1, \quad (9)$$

а из (8) вытекает соотношение

$$q^{-1} \int_0^{\infty} \psi_u^{\#}(\bar{z}) \alpha_u(\bar{z}) dp(u) \sim \int_0^{\infty} \alpha_u(\bar{z}) dp(u),$$

которое при $q \rightarrow 0$ в силу неравенства

$$0 \leq 1 - \int_0^{\infty} \alpha_u(\bar{z}) dp(u) \leq qz, \quad (10)$$

влечет за собой

$$q^{-1} \int_0^{\infty} \psi_u^{\#}(\bar{z}) \alpha_u(\bar{z}) dp(u) \sim 1.$$

Соотношения (9), (10) имеют место равномерно по z из любого конечного интервала.

Воспользовавшись правилом Лопиталья при $q \rightarrow 0$, находим

$$q^{-1}(1 - \alpha_u(\bar{z})) \sim -(\alpha_u(\bar{z}))'_q \sim az a_u^{-1},$$

откуда при $q \rightarrow 0$

$$\int_0^{\infty} q^{-1}(1 - \alpha_u(\bar{z})) dp(u) \rightarrow z \quad (11)$$

равномерно по z из любого конечного интервала.

Обоснуем допустимость предельного перехода под знаком интеграла в (11).

При фиксированном $u \geq 0$ $v(q) \stackrel{\text{def}}{=} a_u(z)$ есть преобразование Лапласа—Стилтьеса (п. Л. —С.) от некоторой ф. р. $V(x)$. Тогда функция

$$\frac{1 - a_u(z)}{qv_1} = \frac{1 - v(q)}{qv_1} \quad (v_1 = \int_0^{\infty} (1 - V(x)) dx)$$

есть также п. Л. —С. от некоторой ф. р. и, следовательно, монотонна по q . Таким образом подынтегральная функция по q монотонна. Осталось применить теорему Леви (4), стр. 74).

Наконец, при $a \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$, собрав воедино (5), (9)–(11), получаем

$$M \exp[-z\tau] \sim \frac{1}{1+z}, \quad \text{что и т. д.}$$

3. В настоящем пункте докажем несколько предельных теорем. Пусть $A(t)$ — фиксированная ф. р. Обозначим

$$a_0 = \left(\int_0^{\infty} t dA(t) \right)^{-1} < +\infty.$$

Теорема 3. 1. Если

а) a_u^{-1} по u ($0 \leq u < \infty$) в совокупности ограничены;

б) существует α , $0 < \alpha < \infty$, такое, что $\beta_{1+\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \int t^{1+\alpha} dB(t) < \infty$, то

$$\lim_{\beta_{1+\alpha} \rightarrow 0} P\{a_0 q \tau > x\} = e^{-x} \quad (x \geq 0).$$

Доказательство. А. Покажем, что $M\xi_1 \rightarrow 0$ при $\beta_{1+\alpha} \rightarrow 0$. Ясно, что величина п. 3. не уменьшится при замене r приборов на один и неограниченном увеличении числа мест для ожидания.

Выберем последовательность чисел ε_i ($0 < \varepsilon_i \leq 1$), где $\varepsilon_i \downarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, и ф. р. $\Phi_i(x)$

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } -\infty \leq x \leq \varepsilon_i \\ 1 - (x^{-1}\varepsilon_i)^{1+\alpha} & , \text{ если } \varepsilon_i \leq x. \end{cases}$$

Для каждого вещественного x $\Phi_j(x) \leq \Phi_i(x)$ ($j < i$) и

$$\varphi_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} x d\Phi_i(x) = \frac{1+\alpha}{\alpha} \varepsilon_i \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty).$$

Если для ф. р. $B(x)$ ($B(+0) = 0$) имеем $\beta_{1+\alpha} \leq \varepsilon_i^{1+\alpha}$, то $B(x) \geq \Phi_i(x)$. Действительно, в противном случае существует $x \in (\varepsilon_i, \infty)$ такое, что $B(x) < \Phi_i(x)$ и

$$\beta_{1+\alpha} \geq (1+\alpha) \int_0^x t^{\alpha} \bar{B}(t) dt \geq \bar{B}(x) x^{1+\alpha} > \bar{\Phi}_i(x) \cdot x^{1+\alpha} = \varepsilon_i^{1+\alpha}.$$

Здесь $\bar{B}(t) = 1 - B(t)$, $\bar{\Phi}_i(t) = 1 - \Phi_i(t)$ ($-\infty < t < +\infty$)

Пусть $B(t)$ и $\Phi_i(t)$ служат ф. р. для сл. в η и ψ_i . Тогда (см. приложение) η и ψ_i . Аналогично тому, как это сделано в приложении, введем сл. в. T_η (T_{ψ_i}) — длительность п. з. системы $G|G|1/\infty$ с ф. р. $B(x)$ ($\Phi_i(x)$) обслуживания.

На основании у. 3 приложения

$$MT_\eta \leq MT_{\psi_i}$$

а поскольку (см. у. 4 приложения) $MT_{\psi_i} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, то из $\beta_{1+i} \rightarrow 0$ вытекает

$$M\bar{\xi}_1 = MT_\eta \rightarrow 0, \text{ что и т. д.}$$

Б. Так как $\beta_{1+i} \rightarrow 0$, то $\beta_1 \rightarrow 0$. Для каждого $\epsilon > 0$

$$q \leq \int_0^{\bar{\beta}_1} A(t) dB(t) = \left(\int_0^\epsilon + \int_\epsilon^{\bar{\beta}_1} \right) A(t) dB(t) \leq A(\epsilon) + 1 - B(\epsilon).$$

Выбором $\epsilon > 0$ можно сделать $A(\epsilon)$ сколь угодно малым, после чего при $\beta_1 \rightarrow 0$ (ϵ уже фиксировано) получим $B(\epsilon) \rightarrow 0$, откуда $q \rightarrow 0$, при $\beta_1 \rightarrow 0$.

В. Поскольку для $\epsilon > 0$ при $\beta_1 \rightarrow 0$

$$\int_0^{\bar{\beta}_1} dp(u) \leq \int_0^\epsilon dB(u) = 1 - B(\epsilon) \rightarrow 0, \quad \int_0^{\bar{\beta}_1} dp(u) \rightarrow 0,$$

то в силу условия а) теоремы, а именно $a_u^{-1} \leq L$ ($0 \leq u < \infty$, $0 < L < \infty$)

$$0 \leq \lim_{\beta_1 \rightarrow 0} \int_0^{\bar{\beta}_1} a_u^{-1} dp(u) \leq L \lim_{\beta_1 \rightarrow 0} \int_0^{\bar{\beta}_1} dp(u) = 0.$$

Так как при $u \rightarrow 0$

$$a_u^{-1} = (\bar{A}(u))^{-1} \cdot \int_0^{\bar{\beta}_1} t d_1 A(t+u) = (\bar{A}(u))^{-1} \cdot \int_u^{\bar{\beta}_1} t dA(t) - u - a_0^{-1}$$

$$(\bar{A}(u) = 1 - A(u))$$

или на языке (ϵ, δ) при $0 \leq u < \epsilon$: $|a_0^{-1} - a_u^{-1}| < \delta$, то

$$a_0^{-1} - \delta = \lim_{\beta_1 \rightarrow 0} (a_0^{-1} - \delta) p(\epsilon) \leq \lim_{\beta_1 \rightarrow 0} \int_0^{\bar{\beta}_1} a_u^{-1} dp(u) \leq \lim_{\beta_1 \rightarrow 0} (a_0^{-1} + \delta) p(\epsilon) = a_0^{-1} + \delta$$

Таким образом, для каждого фиксированного $\epsilon > 0$

$$\lim_{\beta_1 \rightarrow 0} \int_0^{\bar{\beta}_1} a_u^{-1} dp(u) = \lim_{\beta_1 \rightarrow 0} \int_0^\epsilon a_u^{-1} dp(u) = a_0^{-1}.$$

Теорема доказана.

Следствие 3. 1. Если

а) a_u^{-1} по u ($0 \leq u < \infty$) в совокупности ограничены;

б) существует $N > 0$, такое, что $P\{\eta \geq N\} = 1 - B(N) = 0$,

то

$$\lim_{\beta_1 \rightarrow 0} P\{a_0 q \tau > x\} = e^{-x} \quad (x \geq 0).$$

Доказательство следует из теоремы 3. 1 и неравенства (при $x > 0$)

$$\beta_{1+n} = \int_0^N t^{1+n} dB(t) \leq N^n \int_0^N t dB(t) = N^n \beta_1.$$

Теорема 3. 2. Пусть в представлении

$$A(t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t a(u) du\right]$$

мгновенная интенсивность $a(u)$ ограничена; $a(u) \leq a^* < \infty$ и выполнено условие а) теоремы 3. 1.

Тогда

$$\lim_{\beta_1 \rightarrow 0} P\{a_0 q \tau > x\} = e^{-x} \quad (x \geq 0).$$

Доказательство. Поскольку $\beta_1 \rightarrow 0$ и имеет место условие а) теоремы 3. 1, то легко видеть, что содержание пунктов Б и В теоремы 3. 1 имеет силу и в этом случае. Осталось показать, что при $\beta_1 \rightarrow 0$ и $T \rightarrow 0$.

Замена в исследуемой системе числа r приборов на единицу, интенсивности входящего потока на a^* и неограниченное увеличение числа мест для ожидания не уменьшает математическое ожидание (T_1) п. 3.

В новой системе $M/G/1/\infty$

$$T_1 = \frac{\beta_1}{1 - a^* \beta_1} \rightarrow 0 \quad \text{при } \beta_1 \rightarrow 0.$$

Поскольку β_1 в обеих системах одинаково и $T \leq T_1$, то из $\beta_1 \rightarrow 0$ следует $T \rightarrow 0$.

4. Приложение 1°. Введем бинарное отношение. Пусть ξ_1 и ξ_2 — сл. в. с ф. р. $F_1(x)$ и $F_2(x)$, соответственно. Под записью $\xi_1 \leq \xi_2$ понимаем $\bar{F}_1(x) \leq \bar{F}_2(x)$ при каждом вещественном x , где $\bar{F}_i(x) = 1 - F_i(x)$ ($i = 1, 2$). Докажем несколько утверждений (у.).

у. 1. Если $\xi_1 \leq \xi_2$, то $M\xi_1 \leq M\xi_2$.

Доказательство.

$$M\xi_1 = \int_0^\infty \bar{F}_1(x) dx - \int_0^\infty F_1(x) dx \leq \int_0^\infty \bar{F}_2(x) dx - \int_0^\infty F_2(x) dx = M\xi_2.$$

у. 2. Если $\xi_1 \leq \xi_2$, а ξ — произвольная сл. в., то $\xi_1 + \xi \leq \xi_2 + \xi$.

Доказательство. Пусть $G(t)$ — ф. р. сл. в. ξ .

$$P\{\xi_1 + \xi > x\} = \int \bar{F}_1(x-t) dG(t) \leq \int \bar{F}_2(x-t) dG(t) = P\{\xi_2 + \xi > x\}, \text{ что и т. д.}$$

2°. Для системы $G/I/G/1/\infty$ введем следующие обозначения:

η_i — время обслуживания i -го по счету поступившего вызова (η_i — независимы и одинаково распределены); τ_i — интервал времени между поступлениями в систему i -го и $(i+1)$ -го вызовов;

$$\xi_i \stackrel{\text{def}}{=} \eta_i - \tau_i \quad (i \geq 1); \quad Y_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=1}^n \xi_l \quad (n \geq 1), \quad Y_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0; \quad (12)$$

$$\bar{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \sup(Y_0, Y_1, \dots);$$

T_{η_1} — п. з. рассматриваемой системы; ν_0 — число вызовов, обслуженных за один п. з. Очевидно,

$$T_{\eta_1} = \sum_{k=1}^{\nu_0} \eta_k.$$

Воспользуемся известным результатом ((⁵), стр. 190) из теории случайных блужданий (сл. б.).

Для последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ независимых одинаково распределенных сл. в. с $M\xi_i < 0$ случайное число ν_0 шагов до первого (после выхода из точки $Y_0 = 0$) попадания в область $x \leq 0$, имеет конечное математическое ожидание $M\nu_0 < \infty$; более того,

$$M\nu_0 = |P\{\bar{Y} = 0\}|^{-1}.$$

(Здесь употреблены обозначения (12)).

Согласно тождеству Вальда (⁵), стр. 195) имеем

$$MT_{\eta_1} = M\eta_1 \cdot M\nu_0 = \beta_1 \cdot |P\{\bar{Y} = 0\}|^{-1}. \quad (13)$$

В силу (⁶), стр. 171, следствие 2) и $M\xi_i < 0$ вытекает $P\{\bar{Y} = 0\} > 0$. Наконец, полагая в (⁶), стр. 174, следствие 2, первое тождество) $\lambda = 0$ и устремляя $z \uparrow 1$, получаем

$$P\{\bar{Y} = 0\} = \exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \cdot P\{Y_k > 0\}\right]. \quad (14)$$

Допустим в сл. б., не изменяя τ_i , возмущаем η_i и $\bar{\eta}_i$ — возмущенные значения η_i . Тогда сл. в. $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_n, \dots$, где $\bar{\xi}_i = \bar{\eta}_i - \tau_i$, порождают новое сл. б., функционалы которого будем снабжать вверху волной. у. 3. Если $\eta_i \leq \bar{\eta}_i$, то $MT \leq M\bar{T}$.

Доказательство. у. 2., примененное к Y_n и $\bar{Y}_n$ при каждом фиксированном n , дает

$$P\{Y_n > 0\} \leq P\{\bar{Y}_n > 0\} \quad (n \geq 1). \quad (15)$$

Из (14), (15) получаем

$$P|\bar{Y} = 0| \geq P|\bar{Y} = 0|. \quad (16)$$

Осталось воспользоваться у. 1, (13) и (16)

$$MT = \frac{\beta_1}{P|\bar{Y} = 0|} \leq \frac{\bar{\beta}_1}{P|\bar{Y} = 0|} = M\bar{T}, \text{ что и т. д.}$$

Пусть при каждом $k \geq 1$ задана последовательность $\tau_{k1}, \tau_{k2}, \dots, \tau_{kn}, \dots$ независимых одинаково распределенных сл. в., и $\xi_{ki} = \tau_{ki} - \tau_{i-1}$, $M\xi_{ki} < 0$.

Рассмотрим сл. б., порожденное последовательностью $\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{kn}, \dots$

у. 4. Если $\tau_{k1} \approx \tau_{m1}$ при $k > m$ и $M\tau_{m1} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то $MT_{\tau_{m1}} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

у. 4 следует из (13) и (16).

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Է. Ա. ԳԻՆԻԵԼՅԱՆ, Ն. Ս. ԶԵՄԷՆԱՅԷ

Փոխ ծանուցանումը լիարժեքի և $G|G|r/n-r$ տիպի սխառեմների
ասիմպտոտիկ հետազոտում

Իրատարկում է r հատ սարք և $n-r$ սպասման տեղ ունեցող պահպան-
ծալին սպասարկման մի սխառեմ: Առաջացող պահանջները կազմում են $A(t)$
բաշխման ֆունկցիայով սկսվող ներմանող հոսք ($A(0) = 0$):

Պահանջները սպասարկում են միմյանցից անկախ և մի պահանջի
սպասարկման ժամանակը հանդիսանում է $B(t)$ բաշխման ֆունկցիա ունեցող
պատահական մեծություն ($B(0) = 0$): Սպասարկման և պահանջների առաջաց-
ման պրոցեսներն անկախ են:

Սկզբնական մոմենտին սխառեմն ազատ է պահանջներից:

Սպասարկման ժամանակը «փոքր» լինելու դեպքում պահանջի առաջին
կորուստի և պատահական մոմենտի վերաբերյալ ապացուցված են երկու սահ-
մանային թեորեմներ:

Դիցուք՝ q -ն պահանջի կորուստի հավանականությունն է մի պահպանու-
թյան պարբերության ընթացքում և

$$a_u = \int_0^{\infty} t d_t \frac{A(t+u)}{1-A(u)};$$

Թեորեմներ — կրճ՝

ա) a_u^{-1} -որը ըստ u -ի ($0 \leq u < \infty$) սահմանափակ են:

բ) գոյություն ունի α , $0 < \alpha < \infty$, այնպիսին, որ $\int_0^{\infty} t^{1+\alpha} dB(t) < \infty$,

ապա՝

$$\lim_{\beta_{1+\epsilon} \rightarrow 0} P|a_0 q \tau > x| = e^{-x} \quad (x \geq 0);$$

Քեռրեմ — 'Իրցուք'

$$A(t) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^t a(u) du \right\}, \quad a(u) \leq a^* < \infty$$

և սեղի ունի նախորդ բեռների m) պայմանը:
Այդ դեպքում՝

$$\lim_{\beta_1 \rightarrow 0} P\{a_0 q \tau > x\} = e^{-x} \quad (x \geq 0):$$

ЛИТЕРАТУРА — ՎՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. Д. Соловьев, Докторская диссертация, МГУ, 1972. ² О. П. Виноградов, Кандидатская диссертация, МГУ, 1968. ³ Д. Б. Гнеденко, Кандидатская диссертация, МГУ, 1975. ⁴ А. Н. Ширяев, Дополнительные главы теории вероятностей, МГУ, 1968. ⁵ Ю. А. Розанов, случайные процессы, М., «Наука», 1971. ⁶ А. А. Боровков, Курс теории вероятностей, М., «Наука», 1972.