ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 2

УДК 518.5 : 519.5

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Азатян

Об одном алгоритме для перечисления всех неупорядоченных разбиений всякого целого n

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Ф. Т. Саркисяном 18/VII 1975)

Введем некоторые определения. Множества всех неупорядоченных и упорядоченных разбиений (1) всякого целого n назовем „полными" и обозначим соответственно через $\{S_n\}$ и $\{{}_rS_n\}$. Множества всех n-перестановок без повторений и с повторениями (при любых неупорядоченных разбиениях всякого целого n) назовем „полными" и обозначим соответственно через $\{P_n\}$ и $\{P'_n\}$ (2). Множества всех ассоциаций таблицы при любых распределениях столбцов (3) назовем „полными" и обозначим через $\{U\}$. Для всякого целого $n(n=l=p)$ рассмотрим множества всех различных k-ых и q-ых распределений $(l;\ l_{1k}, l_{2k}, \ldots, l_{vk})$ и $(p;\ p_{1q}, p_{2q}, \ldots, p_{wq})$, где $v=\varphi(k)$, $w=\psi(q)$, сопоставляя им соответствующие произведения: $a_k=(l_{1k}!)\cdot(l_{2k}!)\cdot\ldots\cdot(l_{vk}!)$ и $b_q=(p_{1q}!)\cdot(p_{2q}!)\cdot\ldots\cdot(p_{wq}!)$, и обозначим через $\{U\}_{n,k,q}$ полные множества ассоциаций таблиц с числом строк n при всех различных k-ых и q-ых распределениях столбцов.

Широкий класс комбинаторных задач сводится к проблемам пересчета (dénombrement) и перечисления (énumération) (4) элементов множеств $\{S_n\}$ и $\{{}_rS_n\}$. При этом, если вопросы пересчета и перечисления элементов $\{{}_rS_n\}$ достаточно просты, то для решения проблем пересчета и перечисления элементов $\{S_n\}$ в настоящее время не существует достаточно элементарных соотношений. Использование известного тождества Эйлера приводит к следующему рекуррентному соотношению (5):

$$|\{S_n\}| = |\{S_{n-1}\}| + |\{S_{n-2}\}| - |\{S_{n-5}\}| -$$
$$-|\{S_{n-7}\}| + \ldots + (-1)^{k-1}|\{S_{n-\frac{3k^2-k}{2}}\}| + (-1)^{k-1}|\{S_{n-\frac{3k^2+k}{2}}\}| + \ldots \tag{1}$$

Известны асимптотическое приближение Рамануджана (5)

$$|\{S_n\}| \sim \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\, n^{\frac{1}{2}}\right) \tag{2}$$

и разложение Радемахера [5]

$$||S_n||=\sum_{k=1}^{k=\infty} L_k(n)\Psi_k(n), \tag{3}$$

где:

$$\Psi_k(n)=\frac{k^{\frac{1}{2}}}{\pi\sqrt{2}}\cdot\frac{d}{dn}\left[\frac{\operatorname{sh}\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{k}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right],$$

$$L_k(n)=\sum w_{p,k}\exp\left(-\frac{2\pi npi}{k}\right),$$

$w_{p,k}$—корень 24-ой степени из единицы, p пробегает все целые числа, взаимно простые с k и не превосходящие k.

Известны аналитические соотношения и алгоритмы для пересчета разбиений с ограничениями на число частей [1,6,7], используемые для пересчета элементов $|S_n|$. Рекуррентная формула, приведенная в [8], позволяет вычислять $||S_{2n+1}||$ за меньшее число шагов, чем рекуррента Эйлера. На основании (1) разработана программа для пересчета $||S_n||$ [9]. Однако специфика конструирования, программных реализаций и эксплуатации алгоритмов для перечисления элементов $|S_n|$ делает мало эффективным использование пересчетных формул и алгоритмов, приведенных в [1, 6–9]; асимптотические же приближения и разложения, подобные (2,3), применимы лишь для теоретических оценок $||S_n||$. В([1], стр. 50) приведена списочная структура, использование которой удобно для указанных целей. Другой алгоритм для перечисления элементов $|S_n|$ строится путем комбинирования алгоритмов, рассмотренных в [2]. Однако алгоритм, конструируемый на основании примера из [1], дает список элементов $|S_n|$, малоинформативный для теоретических приложений, а алгоритм, построенный на основе алгоритмов из [2] не эффективен при реализациях в многопроцессорных системах, что существенно, если учесть резкое возрастание $|S_n||$ с увеличением n.

Рассмотрим один из алгоритмов для перечисления элементов $|S_n|$ (алгоритм AS_n), использующий принцип „размножения треугольников". Осуществление алгоритма удобно рассмотреть поэтапно. На этапе I,a из последовательности n единиц строится треугольная матрица A_1^n с числом строк n; на этапе I,b из каждой из $F(A_1^n)$ строк треугольника A_1^n (исключая I строку) составляются по определенному правилу первые строки треугольников $A_{12}^n, A_{13}^n, \ldots, A_{1F(A_1^n)}^n$; на этапе II, a из каждой первой строки треугольников $A_{12}^n, A_{13}^n, \ldots, \ldots, A_{1F(A_1^n)}^n$ составляются соответственно строки треугольников: $A_{12}^n, A_{13}^n, \ldots$

. . . , $A^n_{1F(A^n_1)}$. Процесс генерирования последующих треугольников из строк предыдущих треугольников продолжается вплоть до исчерпания всех возможностей. Каждая строка построенных треугольников представляет один из способов неупорядоченных разбиений числа n, а все строки — множество $\{S_n\}$.

Алгоритм AS_n

Этап I,a.

1. Сопоставить числу n последовательность из n единиц, принимая построенную n — последовательность в качестве первой строки треугольника A^n_1.

2. Сложить n-й и $(n-1)$-й элементы первой строки треугольника A^n_1.

3. Составить $(n-1)$— последовательность из $(n-2)$-х единиц и двойки, полученной в п. 2, записав двойку на $(n-1)$-ом месте.

4. Записать $(n-1)$— последовательность, построенную в п. 3, во второй строке треугольника A^n_1.

Процесс, аналогичный описанному в п.п. 2—4, продолжить вплоть до записи 1—последовательности, состоящей из числа n

Этап I,b.

1. Сложить $(n-2)$-й и $(n-3)$-й элементы $(n-1)$—последовательности, записанной во второй строке треугольника A^n_1.

2. Из $(n-4)$— х единиц, из двойки полученной в п. 1, и из двойки $(n-1)$—последовательности, записанной во второй строке треугольника A^n_1, составить $(n-2)$—последовательность, записав двойки на $(n-3)$—м и $(n-2)$—м местах, и принять построенную $(n-2)$—последовательность в качестве первой строки треугольника A^n_{12}.

3. Сложить $(n-3)$—й, $(n-4)$—й и $(n-5)$—й элементы $(n-2)$—последовательности, записанной в третьей строке треугольника A^n_1.

4. Из $(n-5)$ единиц, из тройки, полученной в п. 3, и из тройки $(n-2)$—последовательности, записанной в третьей строке треугольника A^n_1, составить $(n-3)$—последовательность, записав тройки на $(n-4)$—м и $(n-3)$—м местах $(n-3)$—последовательности, и принять построенную $(n-3)$—последовательность в качестве первой строки треугольника A^n_{13}. Процессы, аналогичные описанным в п.п. 1, 2 и 3, 4, продолжить вплоть до записи 2—последовательности в первой (и единственной) строке треугольника $A^n_{1F(A^n_1)}$, состоящей из слагаемых, представляющих элементы неупорядоченного разбиения числа n на два слагаемых. Далее следует этап II,а, на котором по принципу, аналогичному описанному на этапе I,a, составляются строки треугольников

Пример

На рис. 1 описывается структура алгоритма AS_{10}. Как видно из рис. 1, $||S_{10}|| = 42$; при этом разбиения 1111111111, 111111112, 11111113, 1111114, 111115, 11116, 1117, 118, 19 и 10 составляют треугольник A_1^{10}; разбиения 11111122, 1111132, 111142, 11152, 1162, 172, 82—треугольник A_{12}^{10}; разбиения 111133, 11143, 1153, 163, 73—треугольник A_{13}^{10}; разбиения 1144, 154, 64—треугольник A_{14}^{10}; разбиение 55—

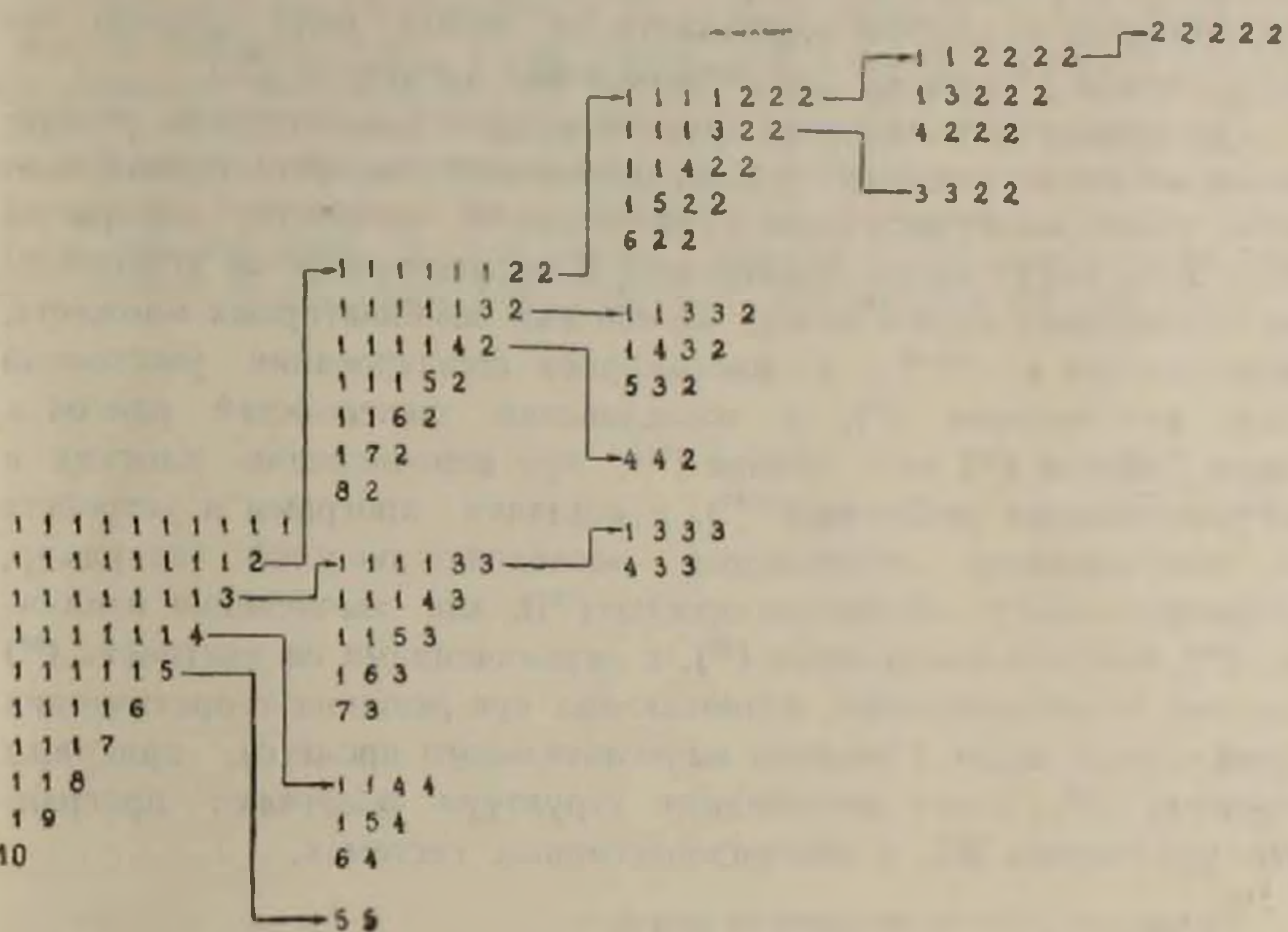

Рис. 1. Структура алгоритма AS_{10}, $|S_{10}|$

треугольник A_{15}^{10}; разбиения 111222, 111322, 11422, 1522, 622—треугольник A_{121}^{10}; разбиения 11332, 1432, 532—треугольник A_{122}^{10}; разбиение 442—треугольник A_{123}^{10}; разбиения 1333, 433—треугольник A_{131}^{10}; разбиения 112222, 13222, 4222—A_{1211}^{10}; разбиения 3322—A_{1212}^{10}; наконец, разбиение 22222—A_{12111}^{10}. Используя алгоритмы для перечисления элементов $|P_n|$ и $|P_n'|$ [2], и алгоритм AS_n, можно сконструировать алгоритм для перечисления элементов $|_rS_n|$ (алгоритм A_rS_n).

Алгоритм A_rS_n.

1. С помощью алгоритма AS_n перечислить все элементы $|S_n|$.

2. С помощью алгоритмов для перечисления элементов $|P_n|$ и $|P_n'|$ (в зависимости от того, является ли разбиение последовательностью из различных или из повторяющихся чисел), принимая каждое из разбиений множества $|S_n|$ в качестве первоначальной перестановки[2], перечислить все возможные перестановки.

В [3] выдвигалась проблема табулирования зависимостей списочных структур множеств $|U^m|$, $|K^r|$ и $|R^r|$ и их мощностей от распределений соответствующих m—таблиц. Было показано, что эта проблема сводится в первую очередь к разработке эффективных методов перечисления элементов множеств $|U|$ и к табулированию зависимостей мощностей $||U|_{n,k,q}|$ от различных значений a_k и b_q. В [2] дается один из методов перечисления элементов $|U|_{n,k,q}$. Однако с ростом n все усложняется задача создания списочной структуры всех возможных неупорядоченных разбиений n. Таким образом, задача табулирования указанной зависимости не может быть решена без использования алгоритма для перечисления элементов $\{S_n\}$.

Программные реализации перечислительных алгоритмов, рассчитанных на выявление структурных особенностей комбинаторных множеств, имеют многочисленные приложения. В частности, алгоритмы AS_n и A_rS_n могут найти применение: в исследованиях по установлению структурных связей между элементами комбинаторных множеств, рассмотренных в [10–12], в многомерном шкалировании расстояний между разбиениями [13], в исследовании зависимостей рангов в смысле Дайсона [14] или Аткина [15], при перечислении плоских и пространственных разбиений[16,17], в создании программ и устройств для генерирования специальных последовательностей (например, последовательность абсолютно простых[18]), для вычисления наилучших [19], взаимно-взвешенных [20], с ограничениями на кратность [21] и других типов разбиений, возникающих при решении теоретических и прикладных задач. Простота вычислительного процесса, присущая алгоритму AS_n, и его древовидная структура облегчают программные реализации AS_n в многопроцессорных системах.

Ереванский НИИ математических машин

Ա. Հ. ԱԶԱՏՅԱՆ

Ամեն մի ամբողջական n-ի չկարգավորված տրոհումների լրիվ բազմության թվարկման ալգորիթմի մասին

Տրվում է ամեն մի ամբողջական n-ի չկարգավորված տրոհումների լրիվ բազմության թվարկման ալգորիթմ։ Բերվում է $n = 10$-ի դեպքում տրոհումների թվարկման պրոցեսի կազմակերպման օրինակ։ Ընդգծվում է նշված տիպի ալգորիթմների օգտագործման նշանակությունը տեսական և կիրառական մաթեմատիկայի տարբեր խնդիրներում։ Բազմապրոցեսային սիստեմներում ալգորիթմի օգտագործման էֆեկտիվությունը բխում է նրա ծառակերպ կազմությունից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Холл*, Комбинаторика, стр. 45—58, пер. с англ., «Мир», М., 1972. [2] *А. А. Азатян*, К вопросу о перечислении элементов полного множества ассоциаций $\{U\}$. Депонированная рукопись, 1974, РИР, № 3, 1975, 3—697. [3] *А. А. Азатян*, ДАН Арм. ССР,

т. LVI, № 4, (1973). [4] А. Кофман, Введение в прикладную комбинаторику, стр. 16, пер. с франц., «Наука», М., 1975. [5] М. Холл, Комбинаторный анализ, стр. 26—37, пер. с англ., „Мир", М., 1963. [6] *V. R. R. Uppuluri, J. A. Carpenter*, „Nav. Res. Log. Quart", 21, № 1, p.p. 201—205 (1974). [7] *R. Karpe*, „Arch. mat.", 6, № 4, 193—202 (1970). [8] *J. A. Ewell*, „J. Combin. Theory", A14, № 1, p.p. 125—127 (1973). [9] *N. V. Migliozzi*, „Pentacon", 32, № 2, p.p. 85—86 (1973). [10] *Gupta Hansraj*, „J. Combin. Theory", A13, №1, p.p. 140—144(1972). [11] *Б. Б. Миркин, Л. Б. Чёрный*, „Мат. анализ экон. моделей. Ч. 3", Новосибирск, стр. 126—147, 1972. [12] *D. Knuth*, „J. Combin. Theory", A10, № 2, p.p. 178—180(1971). [13] *P. Arable, S. Boorman*, „J. Math. Psychol", 10, № 2, 148—203(1973). [14] *F. J. Dyson*, „Eureka", vol. 8, p.p. 10—15(1944). [15] *A. O. L. Atkin*, „Quarterly Journ. of Math"., (2), vol. 17, p.p. 335—338 (1966). [16] *E. A. Bender, D. Knuth*, „J. Combin. Theory", A13, № 1, p.p. 40—54 (1972). [17] *R. Stanley*—„Appl. Math".; 50, №2, p.p. 167—188 (1971); 50, №3, p.p. 259—279 (1971). [18] *T. N. Bhargana, P. H. Doyl*, „Math. Mag"., 47, № 4, p.233 (1974). [19] *M. Magidin*, „BIT" (Sver), 14, № 2, p.p. 203—208, (1974). [20] *D. H. Lehmer*, „Acta arithm"., 21, mem, p.p. 379—388 (1972). [21] *P. Jr. Hagis*, „Trans, Amer. Math. Soc"., 155, № 2, p.p. 375—384 (1971).