ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 2

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

Т. Н. Арутюнян

Асимптотика спектра самосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 29/XII 1975)

Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{S(N)}$ квадратные числовые матрицы четного порядка N, удовлетворяющие условиям

1) $\alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i$
2) $\alpha_j^2 = E$, (E — единичная матрица)
3) $\alpha_j = \alpha_j^*$

Представим четное число N в виде $N = 2^q r$, где r — нечетно. Известно [1], что среди всех матриц порядка N, максимальное число $S(N)$ таких, которые удовлетворяют условиям 1)—3), равно $S(N) = 2q + 1$.

Рассмотрим теперь оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$Lu = \left(-\alpha_1 i \frac{d}{dx} + \sum_{k=2}^{S(N)} p_k(x)\alpha_k\right)u \tag{1}$$

в пространстве $L_N^2(-\infty, \infty)$ вектор-функций $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$ со скалярным произведением

$$[a, b] = \int_{-\infty}^{\infty} (a, b)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\overline{b_k(x)}\,dx,$$

где $p_k(x)$ — действительнозначные непрерывные функции.

Известно, [2], что при этих условиях оператор

$$L = -\alpha_1 i \frac{d}{dx} + Q(x), \tag{1'}$$

где $Q(x) = \sum_{k=2}^{S(N)} p_k(x)\alpha_k = Q^*(x)$, самосопряжен и неполуограничен.

Целью данной заметки является нахождение условий роста и гладкости потенциала $Q(x)$, при которых спектр оператора L чисто дискретен и указание асимптотической формулы распределения числа собственных значений оператора L.

Характерной особенностью потенциальной матрицы $Q(x)$ является ее антикоммутируемость с матрицей α_1, стоящей при главной части оператора. Но известно, ([3]), что оператор вида (1′) с произвольным эрмитовым потенциалом $Q(x)$ унитарно эквивалентен оператору вида (1′) с эрмитовым потенциалом, антикоммутирующим с матрицей α_1.

Уравнение $Lu=\lambda u$ в случае $N=2$ (система Дирака) было изучено в работе И. С. Саргсяна ([4]). Оператор L можно рассматривать как обобщение оператора Дирака, ([4]), на случай систем произвольного четного порядка.

Главным нашим орудием в исследовании спектра оператора будет его матрица—функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$.

1. Функцию Грина будем искать методом параметрикс, т. е. сначала мы найдем функцию Грина оператора L_0 с „замороженными" коэффициентами, а затем покажем, что решение интегрального уравнения

$$G(x, \xi, \lambda)=g_0(x, \xi, \lambda)+\int_{-\infty}^{\infty} G(x, \eta, \lambda)[Q(\xi)-Q(\eta)]g_0(\eta, \xi, \lambda)d\eta \quad (2)$$

есть функция Грина оператора L.

Итак, обозначим через $g_0(x, \xi, \lambda)$ функцию Грина оператора

$$L_0=-\alpha_1 i\frac{d}{dx}+Q(\xi), \qquad \xi\in(-\infty, \infty).$$

По определению $g_0(x, \xi, \lambda)$ удовлетворяет условиям:

1) $(L_0-\lambda E)g_0(x, \xi, \lambda)=\delta(x-\xi)$; (3)

2) элементы $g_{ij}(x, \xi, \lambda)$ матрицы g_0 $(i, j=1, \ldots, N)$ принадлежат $L^2(-\infty, \infty)$ по x.

Используя преобразование Фурье, из уравнения (3) находим

$$g_0(x, \xi, \lambda)=(i\varkappa\, sgn(x-\xi)\alpha_1+Q(\xi)+\lambda E)\frac{e^{-\varkappa|x-\xi|}}{2\varkappa}, \quad (4)$$

где

$$\varkappa^2=\varkappa^2(\xi, \lambda)=\sum_{k=2}^{S(N)} p_k^2(\xi)-\lambda^2=a^2(\xi)-\lambda^2.$$

В дальнейшем нам понадобятся оценки норм Гильберта—Шмидта матрицы $g_0(x, \xi, \lambda)$ и ее производных по λ при $\lambda=i\mu$. Используя вид (4), получаем

$$\left\|\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}g_0(x, \xi, \lambda)\right\|_{\lambda=i\mu}\leqslant\frac{C}{\varkappa^n(\xi)}e^{-b\varkappa(\xi)|x-\xi|}, \quad n=0, 1, 2, \ldots \quad (5)$$

где $0<b<1$. Кроме этого, нам нужны оценки ядер

$$K_n(x, \xi, \lambda) = [Q(\xi) - Q(x)] \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, \xi, \lambda), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Наложим на $Q(x) = \sum_{k=2}^{S(N)} p_k(x) \alpha_k$ следующие условия:

$$1) \ \| [Q(\xi) - Q(x)] Q^{-a}(\xi) \| \leqslant A |x - \xi|, \qquad \text{при } |x - \xi| \leqslant 1, \ A > 0, \ 0 < a < 2 \quad (6)$$

$$2) \ \| Q(\xi) \| \leqslant B \| Q(x) \| \qquad \text{при } |x - \xi| \leqslant 1, \ B > 0 \quad (7)$$

$$3) \ \| Q(x) \| \leqslant K e^{c_0 |x - \xi| \alpha(\xi)} \qquad \text{при } |x - \xi| > 1, \ K > 0, \ 0 < c_0 < 1. \quad (8)$$

Оценивая при этих условиях $K_n(x, \xi, \lambda)$, получаем

$$\left\| K_n(x, \xi, \lambda) \right\|_{\lambda = i\mu} \leqslant \begin{cases} \dfrac{C}{\varkappa^{n+1-a}(\xi)} e^{-B_0 \varkappa(\xi) |x - \xi|} & \text{при } |x - \xi| \leqslant 1 \\ \dfrac{C}{\varkappa^{r+n}(\xi)} e^{-B_0 \varkappa(\xi) |x - \xi|} & \text{при } |x - \xi| > 1 \end{cases} \quad (9)$$

где $0 < B_0 < 1$, а r — произвольное положительное число. Кроме этих, можно получить и следующие оценки

$$\left\| K_n(x, \xi, \lambda) \right\|_{\lambda = i\mu} \leqslant \begin{cases} \dfrac{C}{\mu^{n+\sigma}} \dfrac{e^{-B_0 |x - \xi|}}{|x - \xi|^{\alpha}}, & |x - \xi| \leqslant 1 \\ \dfrac{C}{\mu^{n+\sigma}} \cdot \dfrac{e^{-B_0 |x - \xi|}}{\varkappa^r(\xi)}, & |x - \xi| > 1 \end{cases} \quad (10)$$

где $\alpha = a - 1 + \sigma$, σ — произвольное положительное число. За счет выбора достаточно малого σ можно считать, что $\alpha < 1$. Используя оценки (10), можно доказать теорему

Теорема 1. *Обозначим через X банахово пространство матричных функций $A(x, \xi)$, $x, \xi \in (-\infty, \infty)$, с нормой*

$$\| A(x, \xi) \|_X = \sup_{\xi \in (-\infty, \infty)} \int_{-\infty}^{\infty} \| A(x, \xi) \| \, dx$$

где $\| \cdot \|$ — норма Гильберта—Шмидта. Рассмотрим в пространстве X операторы N_j, определяемые равенствами

$$N_j A(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x, \eta) K_j(\eta, \xi, i\mu) \, d\eta, \ (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Если матрица $Q(x)$ удовлетворяет условиям (6)—(8), *то при достаточно больших μ операторы N_j являются сжимающими в пространстве X.*

Поскольку уравнение (2) можно записать в виде

$$G(x, \xi, \lambda) = g_0(x, \xi, \lambda) + N_0 G(x, \xi, \lambda)$$

и поскольку $g_0(x, \xi, i\mu) \in X$, то из сжимаемости оператора N_0 следует единственность решения уравнения (2) в классе X.

Лемма 1. *Решение интегрального уравнения* (2) *есть функ-*

ция Грина оператора L, *т. е.* $(L-\lambda E)G(x, \xi, \lambda)=\delta(x-\xi)$.

Доказательство леммы легко следует из того, что $(L_0-\lambda E)g_0(x, \xi, \lambda)=\delta(x-\xi)$ и единственности решения уравнения (2).

Чтобы спектр оператора L был чисто дискретным, достаточно, чтобы некоторая степень резольвенты $R_\lambda=(L-\lambda E)^{-1}$ была вполне непрерывным оператором, а так как

$$R_\lambda^n f(x)=(L-\lambda E)^{-n}f(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\lambda^{n-1}}G(x, \xi, \lambda)f(\xi)\,d\xi$$

то достаточно, чтобы ядро $\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial\lambda^{n-1}}G(x, \xi, \lambda)$ было бы ядром Гильберта—Шмидта. Дифференцируя уравнение (2) по λ и решая после каждого дифференцирования полученные интегральные уравнения методом итераций (что возможно вследствие оценок (5), (9), (10)), получим нужные нам оценки

$$\left\|\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}G(x, \xi, \lambda)\right\|_{\lambda=i\mu}\leqslant\left\|\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}g_0(x, \xi, \lambda)\right\|_{\lambda=i\mu}+\frac{Ce^{-B\alpha|x-\xi|}}{\varkappa^{n+2-\alpha}(\xi)}+\frac{Ce^{-B|x-\xi|}}{\varkappa^{n+r}(\xi)},$$

$$n=0, 1, 2, \dots \qquad (11)$$

где $0<B<1$, r — произвольное положительное число

Теорема 2. *Если матрица* $Q(x)$ *удовлетворяет условиям* (6)—(8), *а также условию (при больших* $|x|$)

$$\sum_{k=2}^{S(N)} p_k^2(x)=a^2(x)>c|x|^\varepsilon, \quad \varepsilon>0, \quad c>0, \qquad (12)$$

то спектр оператора L *чисто дискретный.*

Используя оценки (5) и (11) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\|\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}G(x, \xi, \lambda)\right\|_{\lambda=i\mu}dx\,d\xi<C\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\varkappa^{n+1}(\xi)}\leqslant C\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{a^{n+1}(\xi)}. \qquad (13)$$

Возьмем n настолько большим, чтобы $\dfrac{n+1}{2}\cdot\varepsilon>1$. Тогда последний интеграл в (13) сходится согласно условию (12), а это значит, что $\dfrac{\partial^n}{\partial\lambda^n}G(x, \xi, \lambda)$ есть ядро Гильберта—Шмидта, что и доказывает теорему.

Исходя из оценки (11) можно доказать также следующее утверждение.

Лемма 2. *Если* $Q(x)$ *удовлетворяет условиям* (6)—(8), *а также условию (при больших* $|x|$).

$$c|x|^\varepsilon<a^2(x)<C|x|^\varepsilon, \quad \varepsilon>0, \quad 0<c<C \qquad (14)$$

то при $\lambda = i\mu$, $\mu \to \infty$, $n > \frac{2}{\varepsilon}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sp} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} G(x, x, \lambda) dx \sim \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sp} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, x, \lambda) dx. \tag{15}$$

Введем теперь функцию

$$\psi(\lambda) = \frac{N}{2\pi} \int_{a^2(x) < \lambda^2} [\lambda^2 - a^2(x)]^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{при } \lambda \geqslant 0$$

и положим $\psi(-\lambda) = -\psi(\lambda)$.

Лемма 3. *Если $Q(x)$ удовлетворяет условию* (12), *то при* $n > \frac{2}{\varepsilon}$ и $\lambda = i\mu$ *имеет место равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sp} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, x, \lambda) dx = n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{(t-\lambda)^{n+1}}. \tag{16}$$

Обозначим через $\lambda_{\mp 1}, \lambda_{\mp 2}, \ldots$ собственные значения оператора L, а через $N_+(\lambda) = \sum\limits_{0 < \lambda_n < \lambda} 1$ и $N_-(\lambda) = \sum\limits_{\lambda < \lambda_{-n} < 0} 1$.

Положим

$$N(\lambda) = \begin{cases} N_+(\lambda), & \lambda \geqslant 0 \\ -N_-(\lambda), & \lambda < 0. \end{cases}$$

Лемма 4. *Если $G(x)$ удовлетворяет условиям* (6)—(8) и (12), *то при* $\lambda = i\mu$ и $n > \frac{2}{\varepsilon}$ *справедливо равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sp} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} G(x, x, \lambda) dx = n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dN(t)}{(t-\lambda)^{n+1}}. \tag{17}$$

Из (15), (16) и (17) теперь следует важное отношение при $\lambda = i\mu$, $\mu \to \infty$ и достаточно больших n

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dN(t)}{(t-\lambda)^{n+1}} \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{(t-\lambda)^{n+1}}$$

Применяя теперь двустороннюю тауберову теорему ([5]), получим теорему о асимптотике числа собственных значений оператора L.

Теорема 3. *Если $Q(x)$ удовлетворяет условиям* (6)—(8) и (14) *и если существуют постоянные* $M > 0$, $R > 0$, $n < \gamma < n+1$ *такие, что при* $|\lambda_1| > |\lambda_2| > R$

$$\frac{\psi(\lambda_1)}{\psi(\lambda_2)} < M \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\gamma},$$

то

$$N(\lambda)\sim\psi(\lambda)\quad \text{\textit{при}}\ \lambda\to\pm\infty,$$

т. е.

$$N_+(\lambda),\ N_-(\lambda)\sim\frac{N}{2\pi}\int\limits_{a^2(x)<\lambda^2}[\lambda^2-a^2(x)]^{\frac{1}{2}}dx$$

соответственно при $\lambda\to+\infty$ *и* $\lambda\to-\infty$.

В заключение автор выражает благодарность А. Г. Костюченко за обсуждение результатов работы.

Ереванский государственный университет

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Ինքնահամալուծ առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի սպեկտրի ասիմպտոտիկան

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է (1) օպերատորի սեփական արժեքների թվի ասիմպտոտիկան։ Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ. Եթե $Q(x)$ մատրիցը բավարարում է (6)—(8) և (14) պայմաններին, ապա տեղի ունի հետևյալ ասիմպտոտիկան՝

$$N_+(\lambda),\ N_-(\lambda)\sim\frac{N}{2\pi}\int\limits_{a^2(x)<\lambda^2}[\lambda^2-a^2(x)]^{\frac{1}{2}}dx$$

համապատասխանաբար, երբ $\lambda\to+\infty$ և $\lambda\to-\infty$։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Stöckert Bernd.*, Publs math 17, № 1—4, 41—55 (1970). [2] *В. В. Мартынов*. ДАН СССР т. 165, № 5 (1965). [3] *В. М. Адамян*, ДАН СССР т. 178, № 1 (1968). [4] *И. С. Саргсян*, „Известия АН СССР", сер. мат. 36, № 2 (1972). [5] *Я. Т. Султанаев*, „Известия ВУЗов", № 1 (140) (1974).