ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 2

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

Ф. Э. Мелик-Адамян

# Об одной обратной задаче для канонических дифференциальных операторов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 28/XII 1975)

Пусть $H$—гильбертово пространство и $[H_1, H_2]$ $([H])$ кольцо линейных ограниченных операторов, действующих из $H_1$ в $H_2 (H \to H)$. Выберем в $H$ какой-нибудь оператор $J$ со свойствами: $J^* = -J$, $J^2 = -I$ ($I$—единичный оператор). Имеем $J = iP_+ - iP_-$, где $P_\pm$—ортогональные проекторы: $P_\pm = \frac{1}{2}(J \mp iI)$, которые разбивают $H$ на два подпространства $H_+ = P_+H$ и $H_- = P_-H$. Рассмотрим в пространстве $H$ канонические дифференциальные уравнения

$$J\frac{dx(r,\lambda)}{dr} = \lambda x(r,\lambda), \tag{$1_0$}$$

$$(0 < r < \infty;\ -\infty < \lambda < \infty)$$

$$J\frac{dy(r,\lambda)}{dr} - V(r)y(r,\lambda) = \lambda y(r,\lambda). \tag{$1_1$}$$

Здесь $V(r)$—суммируемая оператор-функция с самосопряженными и $J$—эрмитовыми значениями:

$$V \in L^1(0,\infty;\ [H]);\ V^*(r) = V(r);\ JV(r) = -V(r)J. \tag{2}$$

Заметим, что последнее условие на $V(r)$ фактически не нарушает общности наших рассмотрений (см. [1]).

В силу суммируемости оператор-функции $V(r)$ уравнения $(1_0)$ и $(1_1)$ асимптотически эквивалентны ([2] стр. 167). Обозначим через $A(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ оператор асимптотической эквивалентности ([2] стр. 206), т. е. такой оператор $A(\lambda)$, что решения $x(r,\lambda)$ и $y(r,\lambda)$ уравнений $(1_0)$ и $(1_1)$ соответственно, определенные начальными значениями $x(0,\lambda) = x_0$ и $y(0,\lambda) = A(\lambda)x_0$ асимптотически эквивалентны: $\lim_{r\to\infty} \| x(r,\lambda) - y(r,\lambda) \| = 0$. Известно ([2] стр. 206), что $A(\lambda)$ является $J$-унитарным оператором: $A^*(\lambda)JA(\lambda) = A(\lambda)JA^*(\lambda) = J$.

В работе исследуются свойства оператора асимптотической эквивалентности $A(\lambda)$ и в случае $\dim H<\infty$ доказывается возможность однозначного восстановления потенциала $V(r)$, удовлетворяющего условием (2), по заданному оператору $A(\lambda)$, так чтобы $A(\lambda)$ являлась оператором асимптотической эквивалентности уравнений $(1_0)$ и $(1_1)$.

п. 1. Пусть $T_0$ и $T_1$ минимальные симметрические операторы в пространстве $L^2(0, \infty, H)$, определенные дифференциальными выражениями, участвующими в уравнениях $(1_0)$ и $(1_1)$. Рассмотрим действующие в пространстве $L^2(0, \infty; H)$ операторы преобразования $I+K$ и $I+L$, удовлетворяющие условиям

$$(I+K)T_0^*f=T_1^*(I+K)f \quad \forall f\in D(T_0^*) \tag{$3_0$}$$

$$(I+L)T_1^*f=T_0^*(I+L)f \quad \forall f\in D(T_1^*) \tag{$3_1$}$$

Ищем их в виде

$$(I+K)f(r)=f(r)+\int_r^{\infty} K(r, t)f(t)dt \tag{$4_0$}$$

$$(I+L)f(r)=f(r)+\int_r^{\infty} L(r, t)f(t)\,dt \tag{$4_1$}$$

Ядра $K(r, t)$ и $L(r, t)$ этих операторов определяются с помощью решений систем

$$\left|\begin{aligned} &K_1(r, t)=J\int_r^{\infty} V(\tau)K_2(\tau, \tau+t-r)d\tau \\ &K_2(r, t)=\frac{1}{2}JV\left(\frac{r+t}{2}\right)+J\int_r^{\frac{r+t}{2}} V(\tau)K_1(\tau, r+t-\tau)d\tau \end{aligned}\right. \tag{$5_0$}$$

$$\left|\begin{aligned} &L_1(r, t)=J\int_r^{\infty} L_2(\tau+r-t, \tau)V(\tau)d\tau \\ &L_2(r, t)=\frac{1}{2}JV\left(\frac{r+t}{2}\right)-J\int_{\frac{r+t}{2}}^{r} L_1(r+t-\tau, \tau)V(\tau)d\tau \end{aligned}\right. \tag{$5_1$}$$

по формулам: $K(r, t)=K_1(r, t)+K_2(r, t)$, $L(r, t)=L_1(r, t)+L_2(r, t)$. Заметим, что $JK_1(r, t)=K_1(r, t)J$; $JK_2(r, t)=-K_2(r, t)J$. Аналогично для $L_j(r, t)$ $(j=12)$. Методом последовательных приближений доказывается существование и единственность решений этих систем в классе измеримых оператор-функций, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0<r<\infty}\int_r^{\infty}\|F_j(r, t)\|\,dt<\infty;\ \sup_{0<t<\infty}\int_0^{t}\|F_j(r, t)\|\,dr<\infty \quad (j=1, 2). \tag{6}$$

В силу последнего условия операторы $I+K$ и $I+L$ ограничены. Исходя из систем $(5_0)$ и $(5_1)$ можно доказать, что $(I+K)^{-1}=I+L$.

Введем теперь оператор $I-\Gamma$ по формуле

$$I-\Gamma=(I+K)^{-1}(I+K^*)^{-1}. \tag{7}$$

Ясно, что оператор $\Gamma$ определяется ядром $\Gamma(r, t)$:

$$\Gamma(r, t) = \begin{cases} L(r, t) + \int\limits_r^t L(r, s) L^*(t, s) ds & \text{при} \quad r \leq t \\ L^*(r, t) + \int\limits_t^r L(t, s) L^*(r, s) ds & \text{при} \quad r \geq t \end{cases}$$

Оператор $I - \Gamma$ оказывается перестановочным с оператором $T_0$. Это условие в терминах ядра $\Gamma(r, t)$ выражается в виде равенства $\Gamma(r, t) = \Gamma(r+t)$, где $\Gamma(t)$ суммируемая оператор-функция с самосопряженными и $J$-эрмитовыми значениями.

Таким образом для оператора $\Gamma$ имеем

$$(\Gamma f)(r) = \int\limits_0^\infty \Gamma(r+t) f(t) dt \quad f \in L^2(0, \infty; H), \tag{8}$$

где

$$\Gamma \in L^1(0, \infty; |H|); \ \Gamma^*(t) = \Gamma(t); \ J\Gamma(t) = -\Gamma(t)J. \tag{9}$$

Теперь равенство (7) в терминах ядер приведет к соотношению

$$K(r, t) - \int\limits_r^\infty K(r, s)\Gamma(s+t) ds = \Gamma(r+t) \tag{10}$$

Обратно. Пусть оператор $I - \Gamma$, где $\Gamma$ определяется равенством (8) при условии (9); допускает в кольце интегральных операторов, действующих в $L^2(0, \infty; H)$, факторизации вида (7) ([3], стр. 191, 221). При этих условиях оператор $I + K$ является оператором преобразования вида ($3_0$), где потенциал $V(r)$, определяющий дифференциальный оператор $T_1$ имеет вид

$$V(r) = K(r, r)J - JK(r, r).$$

Самосопряженность $V(r)$ получается из тождества

$$K(r, r+t) + \int\limits_0^\infty K(r, r+t+s) K^*(r, r+s) ds =$$

$$= K^*(r, r+t) + \int\limits_0^\infty K^*(r, r+s) K^*(r, r+t+s) ds,$$

которая является следствием соотношения (10).

Таким образом между потенциалами $V(r)$, удовлетворяющими условиям (2) и функциями $\Gamma(t)$ с вышеприведенными свойствами устанавливается взаимнооднозначное соответствие. Отметим, что в случае $\dim H < \infty$, норма оператора $\Gamma$, определенного в пространстве $L^2(0, \infty; H)$ равенством (8), оказывается строго меньше единицы.

п. 2. Рассмотрим оператор-функцию $U_0(r, \lambda) = e^{-i\lambda r} P_+ + e^{i\lambda r} P_-$ $\left(-\infty < \lambda < \infty; \ P_\pm = \frac{1}{2}(J \mp iI)\right)$, являющуюся оператором Коши уравнения ($1_0$), т. е.

$$J \frac{dU_0(r, \lambda)}{dr} = \lambda U_0(r, \lambda); \ U_0(0, \lambda) = I.$$

Образуем оператор-функцию

$$U(r, \lambda) = U_0(r, \lambda) + \int_r^\infty K(r, t)\, U_0(t, \lambda)dt.$$

Учитывая систему ($5_0$) легко проверить, что $U(r, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$U(r, \lambda) = U_0(r, \lambda) - J\int_0^\infty U_0(r-s, \lambda)JV(s)U(s, \lambda)ds$$

т. е. является решением уравнения

$$J\frac{dU(r, \lambda)}{dr} - V(r)U(r, \lambda) = \lambda U(r, \lambda)$$

асимптотически приближающейся на бесконечности к $U_0(r, \lambda)$. Более того для $\lambda \in \Pi_\mp$ ($\Pi_\pm$ — нижняя и верхняя полуплоскости комплексной плоскости) имеют смысл выражения $J(r, \lambda) = U(r, \lambda)y_\pm$, если $y_\pm \in H_\pm = P_\pm H$, и являются решениями уравнения ($1_1$), принадлежащими $L^2(0, \infty, H)$. Используя этот факт легко получить

$$((-iJ)\, U(r\lambda)y_+,\ U(r, \lambda)y_+) = -Jm\lambda \int_r^\infty (U(t, \lambda)y_+\, U(t, \lambda)y_+)dt \quad \text{при} \quad Jm\lambda<0$$

$$((iJ)U(r, \lambda)y_-,\ U(r, \lambda)y_-) = Jm\lambda \int_r^\infty (U(t, \lambda)y_-,\ U(t, \lambda)y_-)dt \quad \text{при} \quad Jm\lambda>0.$$

т. е. при каждом $r \in [0, \infty)$ и $\lambda \in \Pi_\mp$ $U(r, \lambda)H_\pm$ образуют $(\mp iJ)$—положительные подпространства в $H$.

Введем оператор-функцию $A(r, \lambda) = U(r, \lambda)U_0^{-1}(r, \lambda)$.

Имеем

$$A(r, \lambda) = I + \int_0^\infty K(r, r+t)U_0(t, \lambda)dt.$$

Поэтому операторы $A(r, \lambda)P_\pm$ аналитически продолжаются в нижнюю и верхнюю полуплоскости соответственно. В областях своих определений $A(r, \lambda)P_\pm$ отображают $H_\pm$ на $(\mp iJ)$—положительные подпространства. В силу этого операторы $P_\pm A(r, \lambda)P_\pm$ обратимы в $H_\pm$ при каждом $r \in [0, 8)$ и $\lambda \in \Pi_\mp$.

п. 3. Рассмотрим случай $\dim H<\infty$ и пусть $\dim H_+ \leqslant \dim H_-$. Теперь необходимые условия на матрицу асимптотической эквивалентности $A(\lambda) = U(0, \lambda)$ можно сформулировать следующим образом

1) $A(\lambda)$—*$J$-унитарна*: $A^*(\lambda)JA(\lambda) = A(\lambda)JA^*(\lambda) = J$

2) $A(\lambda)$—*допускает представление в виде*

$$A(\lambda) = I + \int_0^\infty K(t)U_0(t, \lambda)dt,$$

*где* $K \in L'(0, \infty;\ [H])$.

3) $P_\pm A(\lambda)P_\pm$ *вместе со своими обратными принадлежат винеровским кольцам* $R_\mp$ *функций вида*

$$cP_\pm + \int_0^\infty K_\pm e^{\mp i\lambda t}\,dt,$$

*где* $K_\pm \in L^1(0, \infty; [H_\pm])$.

Справедлива следующая

Теорема. *По заданной функции* $A(\lambda)$, *удовлетворяющей условиям* 1)—3) *можно построить и притом единственным образом функцию* $V(r)$, *удовлетворяющую условиям* (2), *так чтобы* $A(\lambda)$ *являлась матрицей асимптотической эквивалентности уравнения* $(1_0)$ *и уравнение* $(1_1)$, *определенного искомой функцией* $V(r)$.

В случае $\dim H_+ = \dim H_-$ следствием условий наложенных на $A(\lambda)$ является тот факт, что дробно-линейное преобразование $S(\lambda)$ унитарного отображения $E(E: H_+$ на $H_-)$ с помощью матрицы $A(\lambda)$ оказывается $S$—матрицей некоторого уравнения $(1_0)$ [4]; и по ней можно восстановить потенциал $V(r)$ [5]. В общем случае, рассмотрим уравнение

$$\Gamma(t) + \int_0^\infty K(s-t)\Gamma(s)ds = k(t). \tag{11}$$

Условия 1)—3) наложенные на $A(\lambda)$, дают возможность доказать существование и единственность решения (11) в классе $L^1(0, \infty; [H])$. При этом, оказывается, что $\Gamma(t)$ удовлетворяет условиям (9). Для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в существовании единственного решения уравнения (10). Для этого достаточно доказать, что норма оператора $\Gamma$, определенного соотношениям (8) строго меньше единицы. С этой целью рассматривается дробно-линейное преобразование

$$S_E(\lambda) = (A_{12}^*(\lambda) + A_{22}^*(\lambda)E)(A_{11}^*(\lambda) + A_{21}^*(\lambda)E)^{-1},$$

где $E$—произвольное изометрическое отображение $H_+ \to H_-$. Поскольку $A_{11}^*(\lambda) + A_{21}^*(\lambda)E$ вместе со своим обратным принадлежит винеровскому кольцу $R$, $S_E(\lambda)$ (изометрически отображающее $H_+ \to H_-$) допускает представление

$$S_E(\lambda) = E + \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_E(t)e^{-i\lambda t}\,dt,$$

где $\Gamma_E \in L^1(-\infty, \infty; [H_+, H_-])$. Существенным здесь является тот факт, что $\Gamma_E(t)$ при $t \geq 0$ не зависит от $E$ и совпадает с $P_-\Gamma(t)P_+$, где $\Gamma(t)$ является решением уравнения (11). Это дает возможность доказать, что $\|\Gamma\|_{L^2} < 1$.

Замечание. Анализ вышеприведенных рассмотрений приводит к следующему утверждению.

*Пусть задана* $U(r_0, \lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, *являющаяся значением в точке* $r = r_0$ *операторного решения* $U(r, \lambda)$ *уравнения* $(1_1)$ *с асимптотикой* $U_0(r, \lambda)$ *на бесконечности. По ней однозначно можно восстановить потенциал* $V(r)$ *для* $r \geq r_0$. *Необходимыми условиями на* *матрицу функцию* $U(r_0, \lambda)$ *для того, чтобы она являлась значением* $U(r, \lambda)$ *в точке* $r=r_0$ *являются условия 1)—3) наложенные на функцию* $A(r_0\lambda) = U(r_0, \lambda)U_0^{-1}(r_0, \lambda)$.

Ереванский государственный университет

Ֆ. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ

## Կանոնիկ դիֆերենցիալ օպերատորների մի հակադարձ խնդրի մասին

*Դիտարկվում է* $(1_0)$ *և* $(1_1)$ *հավասարումները* $H$ *հիլբերտյան տարածությունում: Ուսումնասիրվում է այդ հավասարումների* $A(\lambda)(-\infty<\lambda<\infty)$ *ասիմպտոտիկ համարժեքության օպերատորը:* $\dim H<\infty$ *դեպքում ապացուցվում է, որ* 1)—3) *պայմանները* $A(\lambda)$ *մատրից-ֆունկցիայի համար անհրաժեշտ են և բավարար, որպեսզի նա լինի* $(1_0)$ *և* $(1_1)$ *հավասարումների ասիմպտոտիկ համարժեքության օպերատոր:*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. М. Адамян*, ДАН СССР, т. 178, № 1 (1968). [2] *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн*, Устойчивость решений дифференциальных операторов в банаховом пространстве, Наука, 1970. [3] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и их приложения, Наука, 1967. [4] *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян*, Функциональный анализ и ее приложения, т. 4, вып. 4, 1970. [5] *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян*, ДАН Арм. ССР, т. XLXI, № 4 (1968).