ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 2

УДК 513

МАТЕМАТИКА

М. А. Акивис, А. В. Чакмазян

О подмногообразиях евклидова пространства с плоской нормальной связностью

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 15/XII 1975)

1. В нормальном расслоении $N\ (V_m)$ подмногообразия V_m риманова пространства V_n и, в частности, евклидова пространства R_n естественным образом определяется линейная связность, называемая нормальной связностью многообразия V_m. Нормальные связности подмногообразий интенсивно изучаются в последнее время (см., например, [1-4]).

Целью настоящей работы является изучение локального строения подмногообразий V_m евклидова пространства R_n, нормальная связность которых является плоской. Такие V_m рассматривались в книге [1]. В работе получен ряд геометрических характеристик изучаемых многообразий, содержащихся в теоремах 1—5. При доказательстве этих теорем используется аппарат, развитый одним из авторов [5-7].

Результаты, полученные в работе, могут быть распространены на подмногообразия пространств постоянной кривизны.

2. Рассмотрим евклидово пространство R_n и в нем множество всех аффинных реперов, образованных его точкой $\mathbf{x}$ и векторами $\mathbf{e}_u$, выходящими из этой точки. Скалярные произведения

$$(\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v) = g_{uv} \tag{1}$$

образуют метрический тензор пространства R_n. Уравнения инфинитезимального перемещения этих реперов имеют вид

$$d\mathbf{x} = \omega^u \mathbf{e}_u,\ d\mathbf{e}_u = \omega_u^v \mathbf{e}_v \ (u,\ v = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

При этом формы Пфаффа, входящие в эти уравнения, удовлетворяют уравнениям структуры [8]:

$$d\omega^u = \omega^v \wedge \omega_v^u,\ d\omega_v^u = \omega_v^w \wedge \omega_w^u. \tag{3}$$

Кроме того, они удовлетворяют уравнениям Пфаффа

$$dg_{uv} = g_{uw}\omega^w_v + g_{wv}\omega^w_u, \tag{4}$$

которые получаются при дифференцировании соотношений (1).

Пусть V_m — подмногообразие пространства R_n, x—его точка и T_x и N_x — касательная и нормальная плоскости V_m в точке x. Обозначим через $T(V_m)$ и $N(V_m)$ касательное и нормальное расслоения над V_m. Присоединим к многообразию V_m подвижный репер так, чтобы его векторы e_i $(i=1,\ldots,m)$ составляли базис в T_x, а векторы e_α $(\alpha=m+1,\ldots,n)$ — базис в N_x. Тогда

$$(e_i e_\alpha) = 0, \ (e_i e_j)=g_{ij}, (e_\alpha e_\beta) = g_{\alpha\beta}. \tag{5}$$

где g_{ij} — метрический тензор многообразия V_m, а тензор $g_{\alpha\beta}$ определяет метрику в нормальном расслоении $N(V_m)$. Обозначим через g^{ij} и $g^{\alpha\beta}$ обратные тензоры для тензоров g_{ij} и $g_{\alpha\beta}$.

В силу (5) из уравнений (4) имеем;

$$g_{ij}\,\omega^j_\alpha + g_{\alpha\beta}\omega^\beta_i = 0, \tag{6}$$

$$dg_{ij} = g_{ik}\omega^k_j + g_{kj}\omega^k_i, \ dg_{\alpha\beta}=g_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta + g_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha.$$

Так как $dx\in T_x$, то

$$\omega^\alpha = 0. \tag{7}$$

Дифференцируя внешним образом эти уравнения и применяя известную лемму Картана (см. например ([8])), получаем

$$\omega^\alpha_i = b^\alpha_{ij}\,\omega^j, \tag{8}$$

где $b^\alpha_{ij} = b^\alpha_{ji}$. Величины b^α_{ij} образуют систему асимптотических тензоров подмногообразия V_m. Кроме этого, в силу уравнений (6) найдем

$$\omega^i_\alpha = - g^{ik}\,g_{\alpha\beta}\,b^\beta_{kj}\,\omega^j. \tag{9}$$

Формы ω^β_α определяют связность в нормальном расслоении $N(V_m)$, которую называют нормальной связностью (1). Форма кривизны этой связности имеет в силу уравнений (3), (8) и (9) вид

$$\Omega^\alpha_\beta = d\omega^\alpha_\beta - \omega^\gamma_\beta\wedge\omega^\alpha_\gamma = g^{ke}\,g_{\beta\gamma}\,b^\alpha_{ki}\,b^\gamma_{ej}\omega^i\wedge\omega^j,$$

а ее тензор кривизны — вид

$$R^\alpha_{\beta ij} = g^{ke}\,g_{\beta\gamma}\,b^\alpha_{k[i}b^\gamma_{|e|j]}. \tag{10}$$

Для векторного поля ξ, принадлежащего нормальному расслоению $N(V_m)$, имеем $\xi=\xi^\alpha e_\alpha$ и в силу (2)

$$d\xi = (d\xi^\alpha + \xi^\beta\omega^\alpha_\beta)\,e_\alpha + \xi^\alpha\omega^i_\alpha\,e_i.$$

Выражение $D\xi = (d\xi^\alpha + \xi^\beta\omega^\alpha_\beta)e_\alpha$ представляет собой ковариантный дифференциал векторного поля по отношению к нормальной связности. Поле ξ называется параллельным векторным полем, если $D\xi=0$.

Говорят, что нормальная связность является плоской, если результат параллельного переноса любого нормального вектора ξ не зависит от пути на многообразии V_m.

Нормальная связность будет плоской тогда и только тогда, когда ее форма кривизны Ω^{α}_{β} тождественно обращается в нуль, что равносильно условию $R^{\alpha}_{\beta ij}=0$.

3. Теорема 1. *Для того, чтобы нормальная связность многообразия V_m была плоской необходимо и достаточно, чтобы многообразие V_m допускало $(n-m)$—параметрическое семейство параллельных многообразий.*

Пусть $\mathbf{y}=\mathbf{x}+\xi^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}$ — произвольная точка нормали N_x многообразия V_m, и V_m'— многообразие, описываемое этой точкой. Для этого многообразия имеем

$$d\mathbf{y}=(\omega^i+\xi^{\alpha}\omega^i_{\alpha})\mathbf{e}_i+(d\xi^{\alpha}+\xi^{\beta}\omega^{\alpha}_{\beta})\,\mathbf{e}_{\alpha}. \qquad (11)$$

Многообразие V_m' будет параллельно V_m, если его касательное пространство T_y параллельно T_x. Это условие равносильно уравнениям

$$D\xi^{\alpha}=d\xi^{\alpha}+\xi^{\beta}\omega^{\alpha}_{\beta}=0, \qquad (12)$$

означающим, что вектор $\xi=\xi^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}$ переносится параллельно в нормальном расслоении.

Для того, чтобы многообразие V_m допускало $(n-m)$—параметрическое семейство параллельных многообразий необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (12) была вполне интегрируема, откуда следует, что $\Omega^{\alpha}_{\beta}=0$, т. е. нормальная связность многообразия V_m будет плоской.

4. Рассмотрим пучок симметричных аффиноров

$$b^i_j(\lambda)=\lambda_{\alpha}g^{ik}b^{\alpha}_{kj}$$

и назовём его пучком основных аффиноров многообразия V_m.
Этот пучок назовем простым, если в нем есть хотя бы один аффинор, имеющий различные собственные значения.

Напомним далее, что сетью линий кривизны многообразия V_m называется его ортогональная сопряженная сеть. Вопрос о существовании сети линий кривизны на многообразии V_m рассматривался в работе ([7]).

Теорема 2. *Для того, чтобы нормальная связность многообразия V_m с простым пучком основных аффиноров была плоской необходимо и достаточно, чтобы это многообразие несло сеть линий кривизны.*

Предположим, что нормальная связность многообразия является плоской, т. е. $R^{\alpha}_{\beta ij}=0$. Тогда из (10) следует, что

$$g^{kl}b^{\alpha}_{k[i}b^{\beta}_{|l|j]}=0. \qquad (13)$$

Так как пучок основных аффиноров многообразия V_m является простым, то в нем найдется хотя бы один аффинор b^i_j, имеющий различные собственные значения. Поэтому существует ортогональный репер, в котором этот аффинор приводится к диагональному виду:

$$b^i_j = \delta^i_j\, b_j. \tag{14}$$

где $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$. Свертывая соотношения (13) с i_β, получим

$$b^\alpha_{k[i}\, b^k_{j]} = 0.$$

В том репере, в котором имеют место соотношения (14), предыдущие уравнения примут вид

$$b^\alpha_{ij}(b_j - b_i) = 0 \quad (i \neq j).$$

Но так как $b_i \neq b_j$, то $b^\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Таким образом, в выбранном ортогональном репере все асимптотические тензоры b^α_{ij} приводятся к диагональному виду, т. е. многообразие V_m несет сеть линий кривизны.

Обратно, предположим, что V_m несет сеть линий кривизны. Выбирая векторы $\mathbf{e}_i$ репера касательными к этой сети, имеем:

$$b^\alpha_{ij} = 0, \; g_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Подставляя эти значения в (10), получаем $R^\alpha_{\beta ij} = 0$.

Заметим, что для пространств постоянной кривизны теорема, аналогичная теореме 2, приводится в книге ([1]). Доказана она впервые Картаном ([9]).

5. Пусть $\mu = \mu^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ — нормальное векторное поле на многообразии V_m. Это поле определяет на V_m поле аффинора $b^i_j(\mu) = \mu_\alpha g^{ik} b^\alpha_{kj}$, принадлежащее пучку основных аффиноров.

Теорема 3. *Если нормальное расслоение $N(V_m)$ допускает одно параллельное векторное поле, такое, что определяемое им поле основных аффиноров $b^i_j(\mu)$ будет простым, то нормальная связность на V_m будет плоской.*

Уравнение параллельного переноса вектора μ записывается в виде

$$d\mu^\alpha + \mu^\beta \omega^\alpha_\beta = 0,$$

дифференцируя которое, получаем

$$\mu^\beta R^\alpha_{\beta ij} = 0.$$

Это уравнение в силу (10) примет вид

$$b^\alpha_{k[i}\, b^k_{j]} = 0,$$

где $b^i_j = b^i_j(\mu)$. Так как симметричный тензор b^i_j является простым, то существует ортогональный базис, в котором он приводится к диагональному виду

$$b^i_j=\delta^i_j b_j, \quad b_i\neq b_j \text{ при } i\neq j.$$

Отсюда так же, как при доказательстве теоремы 2, получаем, что

$$g_{ij}=0,\ b^{\alpha}_{ij}=0 \text{ при } i\neq j,$$

т. е. многообразие V_m несёт сеть линий кривизны. Но в силу теоремы 2 отсюда следует, что нормальная связность на V_m будет плоской.

Заметим, что существование параллельного векторного поля $\mu=\mu^{\alpha}e_{\alpha}$ равносильно возможности двойственной нормализации многообразия V_m с помощью семейства касательных гиперплоскостей $\mu_{\alpha}x^{\alpha}=0$ ([4,10]). Поэтому теорема 3 допускает следующую модификацию.

Теорема 4. *Если многообразие V_m допускает двойственную нормализацию с помощью семейства касательных гиперплоскостей, определяющую простое поле основных тензоров, то нормальная связность этого многообразия будет плоской.*

6. Рассмотрим фокальные образы ([5]) нормального расслоения $N(V_m)$. Точка $y=x+\xi^{\alpha}e_{\alpha}$ называется фокусом нормальной плоскости N_x, если $dy\in N_x$. Из соотношения (11) получим для определения фокусов следующую систему уравнений

$$\omega^i+\xi^{\alpha}\omega^i_{\alpha}=0.$$

Используя (9), перепишем эту систему в виде

$$(g_{ij}-\xi_{\alpha}b^{\alpha}_{ij})\omega^j=0,$$

где $\xi_{\alpha}=g_{\alpha\beta}\xi^{\beta}$. Геометрическое место фокусов плоскости N_x называется фокусной поверхностью. Она определяется уравнением

$$\det(g_{ij}-\xi_{\alpha}b^{\alpha}_{ij})=0 \qquad (15)$$

и является алгебраической гиперповерхностью порядка m.

Теорема 5. *Если многообразие V_m имеет простой пучок основных тензоров и плоскую нормальную связность, то фокусные поверхности его нормальных плоскостей N_x распадаются на m различных $(n-m-1)$-мерных плоскостей, принадлежащих N_x.*

Так как по теореме 2 рассматриваемое многообразие V_m несёт сеть линий кривизны, то его основные тензоры g_{ij} и b^{α}_{ij} приводятся одновременно к диагональному виду

$$g_{ij}=0,\quad b^{\alpha}_{ij}=b^{\alpha}_i\delta_{ij}.$$

Ввиду этого уравнение (15) переписывается так

$$\prod_{i=1}^{m}(1-\xi_{\alpha}b^{\alpha}_i)=0.$$

Поэтому фокусная поверхность нормали N_x распадается на m плоскостей

$$b^{\alpha}_i\xi_{\alpha}=1. \qquad (16)$$

Докажем теперь, что среди плоскостей (16) нет совпадающих. Так как пучок основных тензоров многообразия V_m является простым, то в этом пучке существует аффинор $\lambda_\alpha b^\alpha_{ij}$, имеющий различные собственные значения, которые равны $b_i=\lambda_\alpha b^\alpha_i$. Пусть $\lambda^\alpha=g^{\alpha\beta}\lambda_\beta$ и $\xi^\alpha=t\lambda^\alpha$ — прямая, лежащая в плоскости N_x, проходящая через точку x и имеющая направляющий вектор $\lambda=\lambda^\alpha \mathbf{e}_\alpha$. Эта прямая пересечётся с плоскостью (15) в точках, определяемых значением параметра $t_i=\frac{1}{b_i}$. Но так как $b_i\neq b_j$, то и $t_i\neq t_j$, и точки пересечения прямой $\xi^\alpha=t\lambda^\alpha$ с плоскостью (15) не совпадают, а значит и все эти плоскости будут различными.

7. Пусть V_{n-1} — гиперповерхность в R_n. Ее нормальное расслоение будет одномерным. Оно определяется нормальным векторным полем $\mathbf{e}_n(x)$, $e_n^2=1$. Гиперповерхность V_{n-1} имеет единственный асимптотический тензор b_{ij}. Тензор кривизны нормальной связности гиперповерхности V_{n-1} имеет вид

$$R^n_{nij}=g^{kl}b_{k[i}b_{|l|j]}=0.$$

Следовательно, нормальная связность гиперповерхности всегда будет плоской. С этим связаны хорошо известные утверждения о том, что гиперповерхность допускает однопараметрическое семейство параллельных гиперповерхностей и несет сеть линий кривизны, вытекающие из доказанных выше теорем 1 и 2.

Заметим еще, что при доказательстве теорем 2—5 существенно использовалась простота пучка основных тензоров, которая равносильна отсутствию кратных компонент у фокусных поверхностей нормального расслоения $N(V_m)$. В том случае, когда это предположение не выполнено, исследование сильно усложняется.

Московский институт стали и сплавов
Ереванский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Մ. Ա. ԱԿԻՎԻՍ, Ա. Վ. ՉԱՔՄԱԶՅԱՆ

Էվկլիդյան տարածության ենթաբազմաձևությունների մասին, որոնք ունեն հարթ նորմալ կապակցություն

Այս աշխատանքի նպատակն է հետազոտել R_n էվկլիդյան տարածության V_m ենթաբազմաձևության լոկալ կառուցվածքը, որի նորմալ կապակցությունը հարթ է։ Ստացված են հետևյալ արդյունքները.

1. Որպեսզի V_m բազմաձևության նորմալ կապակցությունը լինի հարթ անհրաժեշտ է և բավարար, որ V_m բազմաձևությունը թույլատրի զուգահեռ բազմաձևությունների $(n-m)$— պարամետրերից կախված ընտանիք։

2. Որպեսզի հիմնական աֆինորների պարզ փնջով V_m բազմաձևության նորմալ կապակցությունը լինի հարթ անհրաժեշտ և բավարար, որ այդ բազմաձևությունը կրի կորության կորերի ցանց։

3. Եթե $N(V_m)$ նորմալ շերտավորումը թույլ է տալիս մեկ զուգահեռ վեկտորական դաշտ, որի որոշած հիմնական աֆինորների դաշտը պարզ է, ապա V_m բազմաձևության նորմալ կապակցությունը հարթ է։

4. Եթե V_m բազմաձևությունը ունի հիմնական տենզորների պարզ փունջ և հարթ նորմալ կապակցություն, ապա նրա N_x նորմալ հարթությունների կիզող մակերևույթները տրոհվում են N_x-ին պատկանող տարբեր $(n-m-1)$ — չափանի հարթությունների։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Chen Bang—Jen*, Geometry of submanifolds (Pure and Appl. Math. N22) New Jork, Marcel Dekker, 1973. [2] *L. Vanhecke*, Bull. cl. sci Acad. roj Belg. V 59 №2, 76—84, 1973. [3] *L. Vanhecke*, „Math. J. Okayama Univ.", vol 16, 147—166, (1974) [4] *Ю. Г. Лумисте, А. В. Чакмазян*, «Известия вузов», Математика, № 5, 144, 148—157, 1974. [5] *М. А. Акивис*, «Известия вузов», Математика, № 1, 9—19, 1957. [6] *М. А. Акивис*, ДАН СССР, т. 139, № 6, 1279—1282 (1961). [7] *М. А. Акивис*, ДАН СССР, т. 149, № 6, 1247—1249 (1963). [8] *С. Стернберг*, Лекции по дифференциальной геометрии. М., 1970. [9] *E. Cartan*, Lecons sur la geometrie des espaces de Rieman, Ganthier-Villars Paris, 1946. [10] *А. В. Чакмазян*, ДАН СССР, т. 196, №3, 538—540 (1971).