УДК 517.5.53

МАТЕМАТИКА

А. Н. Айрапетян, А. Н. Канатников

О множестве функций с суммируемой производной

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 1/XII 1975)

1. В 1951 году С. Н. Мергелян (¹) построил пример голоморфной и ограниченной в круге $D: |z| < 1$ функции $f(z)$ у которой

$$\iint_D |f'(z)| dx dy = +\infty, \quad z = x + iy \quad (1)$$

Обозначим множество таких функций через $\mathfrak{M}^-$. Дж. Пиранян (²) продолжил изучение множества $\mathfrak{M}^-$ и доказал, что $\mathfrak{M}^-$ содержит произведения Бляшке и ограниченные голоморфные в D функции $f(z) \neq 0$.

Несмотря на то, что построение примеров функций из $\mathfrak{M}^-$ сопряжено с определенными техническими трудностями, В. Н. Гаврилов высказал нам предположение, что множество $\mathfrak{M}^-$ достаточно массивное, является множеством второй категории (по Бэру) в H^- . В настоящей заметке мы доказываем справедливость этого предположения также и в случае пространств Харди H^p , $0 < p < \infty$.

2. Для произвольного фиксированного p , $0 < p \leq \infty$ рассмотрим в топологическом пространстве Харди H^p множество $\mathfrak{M}^p$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию (1).

Теорема. Для любого p , $0 < p \leq \infty$, дополнение множества $\mathfrak{M}^p$ относительно H^p является множеством типа F_σ и первой категории в H^p .

Доказательство. Положим $A^p = H^p \setminus \mathfrak{M}^p$, $0 < p \leq \infty$ и рассмотрим множества A_n^p функций $f(z)$ из класса H^p , $p(0 < p \leq \infty)$; — фиксированно, которые удовлетворяют условию

$$\iint_D |f'(z)| dx dy \leq n.$$

Тогда $A^p = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^p$. Покажем, что каждое множество A_n^p замкнуто в топологии H^p . Фиксируем n ; $n=1, 2, \dots$, и рассмотрим последовательность функций $\{f_k(z)\} \subset A_n^p$ сходящуюся к функции $f_0(z)$ в топо-

логии пространства H^p . Из сходимости $f_k(z) \xrightarrow{H^p} f_0(z)$ следует, что $f_k(z) - f_0(z)$ равномерно на компактах круга D , поскольку хорошо известно ⁽³⁾, что если функция $f(z) \in H^p$, $p > 0$, то

$$|f(z)| \leq 2^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} (1-r)^{-\frac{1}{p}}, \quad r = |z| \quad (2)$$

где $f(e^{it}) \in L_p$ — означает угловые предельные значения функции $f(z)$.

Из неравенства (2) вытекает, что из того, что $f_k(z) \xrightarrow{H^p} f_0(z)$, следует равномерная сходимость последовательности $f_k(z)$ к функции $f_0(z)$ на компактах круга D . Применяя теорему Фату ⁽⁴⁾, получим

$$\iint_D |f_0(z)| dx dy \leq n.$$

Итак, $f_0(z) \in A_n^p$ и следовательно, для любого натурального n ; $n = 1, 2, \dots$, множество A_n^p замкнуто в топологии пространства H^p .

Покажем теперь, что множество $\mathfrak{M}^p$ являющееся дополнением множества A^p относительно H^p , всюду плотно в H^p , поскольку $\mathfrak{M}^p$ содержится в дополнении множества A_n^p относительно H^p для каждого n ; $n = 1, 2, \dots$, и множества A_n^p замкнуты, отсюда будет следовать, что все A_n^p нигде не плотны в H^p .

Прежде всего заметим, что сумма двух функций $f(z) + g(z)$ из которых одна, $g(z)$, принадлежит $\mathfrak{M}^p$, а другая, $f(z)$ не принадлежит $\mathfrak{M}^p$, также не принадлежит $\mathfrak{M}^p$. Действительно, так как

$$\iint_D |f'(z) + g'(z)| dx dy \geq \iint_D |g'(z)| dx dy - \iint_D |f'(z)| dx dy,$$

то замечание доказано.

Если $g(z) \in \mathfrak{M}^p$, то положим $f_k(z) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) g(z)$ $k = 1, 2, \dots$; если $g(z) \in H^p \setminus \mathfrak{M}^p$, то рассмотрим произвольную функцию $g_0(z) \in \mathfrak{M}^p$ и положим $f_k(z) = g(z) + \frac{1}{k} g_0(z)$. В силу такого выбора последовательностей $\{f_k(z)\}$, все $f_k(z) \in \mathfrak{M}^p$, $k = 1, 2, \dots$. В каждом из названных случаев, $f_k(z) \xrightarrow{H^p} g(z)$, и значит, $\mathfrak{M}^p$ плотно в H^p . Теорема доказана.

В заключение, пользуясь случаем, выражаем искреннюю благодарность В. И. Гаврилову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ածանցյալով հանրագումարելի ֆունկցիաների բազմության մասին

Հոդվածում դիտարկվում են միավոր շրջանում հոլոմորֆ այն $f(z)$ ֆունկցիաների $\mathfrak{M}$ բազմությունը, որի համար $\int_{|z|<1} |f'(z)| dx dy = +\infty$.

Ապացուցվում է, որ $\mathfrak{M}$ բազմության լրացումը Հարդիի $H^p (0 < p \leq \infty)$ դասերի նկատմամբ հանդիսանում է $F\sigma$ տիպի և առաջին կատեգորիայի բազմություն $H^p (0 < p \leq \infty)$ տարածություններում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. И. Мергелян, Известия АН СССР, сер. матем. 15, стр. 395—400 (1951).
² J. Pflanz, Proc. Amer. Math. Soc. v. 19 №6, p. 1255—1257 (1968). ³ P. Duren, Theory of H^p spaces Academic press, New York and London, 1970. ⁴ И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.