

УДК 519.49

МАТЕМАТИКА

А. Г. Григорян

Плоские функторы и регулярные категории

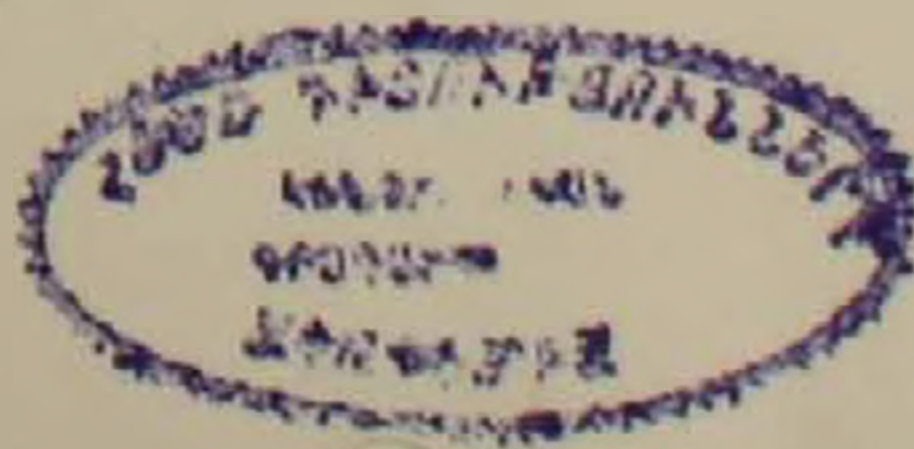
(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 11/XI 1975)

Если дана категория π , условимся обозначать через $|\pi|$ класс объектов этой категории, а через $\pi(p, q)$, где $p, q \in |\pi|$ — множество морфизмов из p в q . Категория π называется *предаддитивной*, если $\pi(p, q)$ — абелева группа для любых $p, q \in |\pi|$, а композиция морфизмов билинейна. В дальнейшем под π всюду будет пониматься малая предаддитивная категория. Всякое кольцо (ассоциативное, с единицей) можно рассматривать как предаддитивную категорию с одним объектом. Категорию ковариантных (контравариантных) аддитивных функторов из π в категорию Ab абелевых групп будем обозначать через Ab^π (Ab^{π^*} , где π^* — категория, двойственная к π). Объекты категории Ab^π будем называть π -модулями, морфизмы — π -гомоморфизмами. Нетрудно показать, что категория правых (левых) модулей над кольцом Λ изоморфна категории Ab^Λ (Ab^{Λ^*}). Будем говорить, что I_p — *правый идеал категории π* , если $I_p \subset \pi$ — подмодуль π -модуля $\pi(p, -)$. *Левыми идеалами категории π* будем называть правые идеалы категории π^* . Если $\alpha \in \pi(r, q)$, то положим для всякого $r \in |\pi|$ $\pi(r, p)\alpha = \{\beta\alpha \mid \beta \in \pi(r, p)\}$. Легко проверяется, что $\pi(-, p)\alpha$ — левый идеал категории π . Можно показать, что левый идеал I_p категории π , конечно порожден в категориальном смысле тогда и только тогда, когда
$$I_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi(-, p_i) \alpha_{ij}$$
 для некоторых $p_i \in |\pi|$, $\alpha_{ij} \in \pi(p_i, p)$ и натуральных чисел n и m .

Лемма 1. (Бэр) (⁽¹⁾, лемма 1). π -модуль F инъективен в том и только в том случае, когда для всякого $p \in |\pi|$ и для всякого правого идеала I_p категории π всякий π -гомоморфизм из I_p в F можно продолжить до π -гомоморфизма из $\pi(p, -)$ в F .

π^* -модулем *характеров π -модуля F* называется π^* -модуль F^* , определяемый условиями:

$$F^*(p) = Ab(F(p), Q/Z), \quad \alpha \chi F^*(\alpha) = \alpha F(\alpha) \chi$$



для любых $\alpha \in \pi(p, q)$, $a \in F(p)$, $\gamma \in F^*(q)$.

Лемма 2. Последовательность π -модулей $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ точна тогда и только тогда, когда точна последовательность $C^* \xrightarrow{g^*} B^* \xrightarrow{f^*} A^*$. Доказательство следует из аналогичного предложения для абелевых групп ((³), предложение 5.3.1).

Тензорным произведением π -модуля F и π^* -модуля G называется абелева группа

$$F \otimes G = \left(\bigoplus_{p \in |\pi|} [F(p) \otimes_Z G(p)] \right) / M,$$

где M — подгруппа группы $\bigoplus_{p \in |\pi|} [F(p) \otimes_Z G(p)]$, порожденная всеми элементами вида $xF(\gamma) \otimes y - x \otimes G(\gamma)y$, где $\gamma \in \pi(p, q)$, $x \in F(p)$, $y \in G(q)$ ((³), стр. 26).

Лемма 3. ((³), стр. 28). Для любого π -модуля F и любого π^* -модуля G имеет место канонический изоморфизм.

$$(F \otimes G)^* \cong \text{Ab}^*(G, F^*).$$

π -модуль F называется плоским, если функтор $F \otimes - : \text{Ab}^* \rightarrow \text{Ab}$ точен слева.

Лемма 4. π -модуль F плоский в том и только в том случае, если π^* -модуль F^* инъективен.

Доказательство. Пусть $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ — произвольная точная последовательность π^* -модулей. Тогда ввиду леммы 2 последовательность $0 \rightarrow F \otimes A \xrightarrow{1_F \otimes f} F \otimes B$ точна тогда и только тогда, когда точна последовательность

$$(F \otimes B)^* \rightarrow (F \otimes A)^* \rightarrow 0.$$

Но в силу леммы 3 последняя последовательность есть не что иное, как последовательность

$$\text{Ab}^*(B, F^*) \rightarrow \text{Ab}^*(A, F^*) \rightarrow 0,$$

а ее точность при всех мономорфизмах f равносильна инъективности π^* -модуля F^* .

Для π -модуля F рассмотрим изоморфизм $k : F \otimes \pi(-, p) \rightarrow F(p)$ ((³), стр. 26), при котором смежному классу, содержащему элемент $\sum_{i=1}^n x_i \otimes \alpha_i$, где $x_i \in F(p_i)$, $\alpha_i \in \pi(p_i, p)$, $p_i \in |\pi|$, ставится в соответствие элемент $\sum_{i=1}^n x_i F(\alpha_i) \in F(p)$. Пусть $\mu : I_p \rightarrow \pi(-, p)$ — вложение левого идеала I_p категории π в $\pi(-, p)$. Обозначим образ сквозного отображения $F \otimes I_p \xrightarrow{1_F \otimes \mu} F \otimes \pi(-, p) \rightarrow F(p)$ через $F \cdot I_p$. Нетрудно видеть, что $F \cdot I_p$ состоит из всех элементов вида $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} F(\alpha_{ij})$,

где

$$x_{ij} \in F(p_i), \quad a_{ij} \in I_p(p_i), \quad p_i \in |\pi|.$$

Лемма 5. Для любого π -модуля F и любого морфизма $\alpha \in \pi(p, q)$

$$F \cdot [\pi(-, p)\alpha] = F(p)F(\alpha).$$

Доказательство. Пусть $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} F(a_{ij}\alpha) \in F \cdot [\pi(-, p)\alpha]$, где $x_{ij} \in F(p_i)$, $a_{ij} \in \pi(p_i, p)$, $p_i \in |\pi|$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} F(a_{ij}\alpha) = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} F(a_{ij}) \right] F(\alpha) \in F(p)F(\alpha).$$

Обратное же включение $F(p)F(\alpha) \subseteq F \cdot [\pi(-, p)\alpha]$ очевидно.

Предложение 1. π -модуль F плоский тогда и только тогда, когда для всякого $p \in |\pi|$ и всякого левого идеала I_p категории π отображение $(1_F \otimes \mu)k: F \otimes I_p \rightarrow F \cdot I_p$ — изоморфизм.

Утверждение остается в силе, если I_p — произвольный конечно порожденный левый идеал.

Доказательство. Если F — плоский π -модуль, то для всякого левого идеала I_p отображение $1_F \otimes \mu$ — мономорфизм. Следовательно, $F \otimes I_p \cong \text{Im}[(1_F \otimes \mu)k] = F \cdot I_p$.

Обратно, если $(1_F \otimes \mu)k$ — изоморфизм, то $F \otimes I_p \rightarrow F(p)$ — мономорфизм. Тогда в силу леммы 2 $F(p)^* \rightarrow (F \otimes I_p)^*$ — эпиморфизм. Но этот эпиморфизм в силу того, что $F(p) \cong F \otimes \pi(-, p)$ и в силу леммы 3 есть не что иное, как эпиморфизм

$$Ab^*(\pi(-, p), F^*) \rightarrow Ab^*(I_p, F^*).$$

Ввиду леммы 1 отсюда следует, что π^* -модуль F^* инъективен. Следовательно, в силу леммы 4 F — плоский π -модуль.

Предположим теперь, что наше допущение об изоморфизме $F \otimes I_p \rightarrow F \cdot I_p$ относится лишь к конечно порожденным идеалам I_p .

Покажем, что если J_p — произвольный левый идеал, то $F \otimes J_p \rightarrow F \cdot J_p$ —

все же изоморфизм. Итак, допустим, что $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} F(a_{ij}) = 0$ в $F \cdot J_p$,

где $x_{ij} \in F(p_i)$, $a_{ij} \in J_p(p_i)$, $p_i \in |\pi|$. Тогда $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} \otimes a_{ij} = 0$ в $F \otimes I_p$, где

$I_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi(-, p_i)a_{ij}$ — конечно порожденный левый идеал. Ввиду на-

личия канонического гомоморфизма $F \otimes I_p \rightarrow F \otimes J_p$ получаем, что

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} \otimes a_{ij} = 0$ и в $F \otimes J_p$, что завершает доказательство.

Свободными π -модулями являются прямые суммы π -модулей вида $\pi(p, -)$ ((³), стр. 18). Заметим, что всякий свободный π -модуль — плоский ((⁴), стр. 11). Поскольку всякий π -модуль изоморфен π -фактормодулю свободного π -модуля ((⁴), стр. 5), то следующий критерий плоскостности представляет интерес.

Предложение 2. Пусть π —модуль $M \cong F/K$, где F —плоский (в частности, свободный) π —модуль. Тогда π —модуль M —плоский тогда и только тогда, когда $F \cdot I_p \cap K(p) = K \cdot I_p$ для любого левого идеала I_p категории π .

Замечание. Так как включение $K \cdot I_p \subseteq F \cdot I_p \cap K(p)$ имеет место всегда, то необходимым и достаточным условием плоскостности является включение $F \cdot I_p \cap K(p) \subseteq K \cdot I_p$.

Доказательство. В силу точности функтора $\otimes$ справл ((⁴), стр. 9) последовательность

$$K \otimes I_p \rightarrow F \otimes I_p \rightarrow M \otimes I_p \rightarrow 0$$

точна. Так как F —плоский π —модуль, то имеет место канонический изоморфизм $F \otimes I_p \cong F \cdot I_p$, а образ $K \otimes I_p$ в $F \otimes I_p$ при этом изоморфизме совпадает с $K \cdot I_p$. Следовательно,

$$M \otimes I_p \cong F \cdot I_p / K \cdot I_p.$$

Отсюда в силу предложения 1 M —плоский π —модуль тогда и только тогда, когда

$$M \cdot I_p \cong F \cdot I_p / K \cdot I_p$$

для любого (конечно порожденного) левого идеала I_p . Произвольный элемент из $M \cdot I_p$ в силу естественности π —эпиморфизма $\sigma: F \rightarrow M$ можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{ij} \sigma_{p_i}) M(a_{ij}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [x_{ij} F(a_{ij})] \sigma_p = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} F(a_{ij}) \right] \sigma_p,$$

где $x_{ij} \in F(p_i)$, $a_{ij} \in I_p(p_i)$, $p_i \in |\pi|$. Значит,

$$M \cdot I_p = (F \cdot I_p) \sigma_p \cong F \cdot I_p / [F \cdot I_p \cap K(p)].$$

Следовательно, M —плоский π —модуль тогда и только тогда, когда $F \cdot I_p / [F \cdot I_p \cap K(p)] \cong F \cdot I_p / K \cdot I_p$ для любого $p \in |\pi|$ и любого (конечно порожденного) левого идеала I_p . Так как $K \cdot I_p \subseteq F \cdot I_p \cap K(p)$, то это равносильно тому, что $F \cdot I_p \cap K(p) = K \cdot I_p$.

Следствие 1. Пусть всякий конечно порожденный левый идеал категории π —главный (т. е. имеет вид $\pi(-, p)\alpha$, где $\alpha \in \pi(p, q)$) и пусть $M \cong F/K$, где F —свободный π —модуль. Тогда M —плоский π —модуль в том и только в том случае, если

$$F(p)F(\alpha) \cap K(q) \subseteq K(p)K(\alpha)$$

для всех $p, q \in |\pi|$, $\alpha \in \pi(p, q)$.

Доказательство. Положим в предложении 2 $I_q = \pi(-, p)\alpha$. Тогда в силу предложения 2, M —плоский π —модуль тогда и только тогда, когда

$$F \cdot [\pi(-, p)\alpha] \cap K(q) \subseteq K \cdot [\pi(-, p)\alpha].$$

В силу леммы 5 это включение можно переписать в виде

$$F(p)F(a) \cap K(q) \subseteq K(p)K(a).$$

Категория π называется *регулярной*, если для любых $p, q \in |\pi|$, $\alpha \in \pi(p, q)$ найдется такое $\beta \in \pi(q, p)$, что $\alpha = \alpha\beta\alpha$ ((³), стр. 90).

Предложение 3. Следующие свойства (не обязательно малой или предаддитивной) категории π равносильны:

- 1) π — регулярная категория;
- 2) всякий главный правый идеал категории π является главным правым идеалом, порождаемым идемпотентом;
- 3) левосторонний аналог свойства 2).

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Для любого $\alpha \in \pi(p, q)$ существует такое $\beta \in \pi(q, p)$, что $\alpha = \alpha\beta\alpha$. Положив $\varepsilon = \alpha\beta$, будем иметь:

$$\varepsilon^2 = \alpha\beta\alpha\beta = \alpha\beta = \varepsilon, \quad \alpha = \alpha\beta\alpha = \varepsilon\alpha.$$

Поэтому $\alpha\pi(q, -) = \varepsilon\pi(p, -)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Если $\alpha \in \pi(p, q)$, то $\alpha = \alpha 1_q \in \alpha\pi(q, q) = \varepsilon\pi(p, q)$ для некоторого $\varepsilon = \varepsilon^2 \in \pi(p, p)$. Следовательно, существует такое $\gamma \in \pi(p, q)$, что $\alpha = \varepsilon\gamma$. Поскольку $\varepsilon \in \varepsilon\pi(p, p) = \alpha\pi(q, p)$, то найдется такое $\beta \in \pi(q, p)$, что $\varepsilon = \alpha\beta$. Тогда $\alpha\beta\alpha = \varepsilon\alpha = \varepsilon^2\gamma = \varepsilon\gamma = \alpha$.

Импликация 1) $\Rightarrow$ 3) и 3) $\Rightarrow$ 1) доказываются аналогично.

Предложение 4. Следующие свойства (не обязательно малой) предаддитивной категории π равносильны:

- 1) π — регулярная категория;
- 2) всякий конечно порожденный правый идеал категории π является главным правым идеалом, порождаемым идемпотентом;
- 3) левосторонний аналог свойства 2).

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Ввиду предложения 3 достаточно доказать, что правый идеал $\alpha\pi(q, -) + \beta\pi(r, -)$ — главный. Здесь $\alpha \in \pi(p, q)$, $\beta \in \pi(p, r)$. В силу предложения 3 существует такое $\varepsilon = \varepsilon^2 \in \pi(p, p)$, что $\alpha\pi(q, -) = \varepsilon\pi(p, -)$. Тогда для любого $s \in |\pi|$ имеем

$$\beta\pi(r, s) = 1_p\beta\pi(r, s) \subseteq \varepsilon\beta\pi(r, s) + (1_p - \varepsilon)\beta\pi(r, s),$$

откуда

$$\alpha\pi(q, s) + \beta\pi(r, s) \subseteq \varepsilon\pi(p, s) + (1_p - \varepsilon)\beta\pi(r, s).$$

Более того, так как $\alpha\pi(q, s) = \varepsilon\pi(p, s)$, то

$$\alpha\pi(q, s) + \beta\pi(r, s) = \varepsilon\pi(p, s) + (1_p - \varepsilon)\beta\pi(r, s).$$

В силу предложения 3 найдется такое $\varphi = \varphi^2 \in \pi(p, p)$, что $(1_p - \varepsilon)\beta\pi(r, s) = \varphi\pi(p, s)$ для всякого $s \in |\pi|$, причем $\varepsilon\varphi = 0$, так как $\varphi \in (1_p - \varepsilon)\beta\pi(r, p)$. Итак, для всякого $s \in |\pi|$ имеем

$$\alpha\pi(q, s) + \beta\pi(r, s) = \varepsilon\pi(p, s) + \varphi\pi(p, s).$$

Положив $\psi = \varphi(1_p - \varepsilon)$, будем иметь

$$\psi\varepsilon = 0, \quad \varepsilon\psi = \varepsilon\varphi(1_p - \varepsilon) = 0, \quad \psi\varphi = \varphi(1_p - \varepsilon)\varphi = \varphi(\varphi - \varepsilon\varphi) = \varphi^2 = \varphi \quad \text{и}$$

$$\psi^2 = \psi\varphi(1_p - \varepsilon) = \varphi(1_p - \varepsilon) = \psi.$$

Поскольку $\psi\varphi = \varphi(\psi = \varphi(1_p - \varepsilon))$, то $\varphi\pi(p, s) \subseteq \psi\pi(p, s)$ ($\psi\pi(p, s) \subseteq \varphi\pi(p, s)$) для всякого $s \in |\pi|$. Значит, $\varphi\pi(p, s) = \psi\pi(p, s)$. Итак $\alpha\pi(q, s) + \beta\pi(r, s) = \varepsilon\pi(p, s) + \psi\pi(p, s)$. Покажем, что $\varepsilon\pi(p, s) + \psi\pi(p, s) = (\varepsilon + \psi)\pi(p, s)$. Включение $\supseteq$ очевидно. Если же $\zeta = \varepsilon\mu + \psi\nu$, где $\mu, \nu \in \pi(p, s)$, то $(\varepsilon + \psi)(\varepsilon\mu + \psi\nu) = \varepsilon\mu + \psi\nu = \zeta$.

Следовательно, справедливо и обратное включение $\subseteq$.

Импlicationи $2) \Rightarrow 1)$ и $3) \Rightarrow 1)$ следуют из предложения 3, а импликация $1) \Rightarrow 3)$ доказывается аналогично импlicationи $1) \Rightarrow 2)$.

Теорема. *Малая предаддитивная категория π регулярна тогда и только тогда, когда все π -модули плоские.*

Доказательство. Предположим, что все π -модули — плоские. Тогда, в частности, для всякого $\alpha \in \pi(p, q)$ π -модуль $\pi(p, -)/\alpha\pi(q, -)$ плоский. В силу предложения 2 это равносильно тому, что для всякого левого идеала I_q категории π

$$\pi(p, -) \cdot I_q \cap \alpha\pi(q, q) = [\alpha\pi(q, -)] \cdot I_q.$$

В частности, если $I_q = \pi(-, p)\alpha$, то

$$\pi(p, -) \cdot [\pi(-, p)\alpha] \cap \alpha\pi(q, q) = [\alpha\pi(q, -)] \cdot [\pi(-, p)\alpha].$$

В силу леммы 5 это равенство можно переписать в виде

$$\pi(p, p)\alpha \cap \alpha\pi(q, q) = \alpha\pi(q, p)\alpha.$$

Поскольку $\alpha = 1_p\alpha = \alpha 1_q \in \pi(p, p)\alpha \cap \alpha\pi(q, q)$, то существует такое $\beta \in \pi(q, p)$, что $\alpha = \alpha\beta\alpha$ т. е. π -регулярная категория.

Предположим теперь, что π -регулярная категория. Пусть $M \cong F/K$, где F — свободный π -модуль. В силу предложения 4 и следствия 1 для плоскостности π -модуля M достаточно доказать, что $F(p)F(\alpha) \cap K(q) \subseteq K(p)K(\alpha)$ для всех $p, q \in |\pi|$ и $\alpha \in \pi(p, q)$. Если $x \in F(p)F(\alpha) \cap K(q)$, то $x = yF(\alpha)$ для некоторого $y \in F(p)$. В силу регулярности π найдется такое $\beta \in \pi(q, p)$, что $\alpha = \alpha\beta\alpha$. Тогда

$$x = yF(\alpha) = yF(\alpha)F(\beta)F(\alpha) = xF(\beta)F(\alpha).$$

Поскольку $x \in K(q)$ и K — π -подмодуль в F , то $xF(\beta) \in K(p)$. А тогда $xF(\beta)F(\alpha) \in K(p)K(\alpha)$. Теорема доказана.

В заключение искренне благодарю Л. А. Скорнякова за руководство работой.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Ա. Դ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Տափալի ֆունկտորներ և ռեզուլյար կատեգորիաներ

Փոքր պրեդատորիվ π կատեգորիայից արելյան խմբերի կատեգորիան տանող կովարիանտ ադիտիվ ֆունկտորները կոչվում են π -մոդուլներ:

Ապացուցվում են π -մոդուլների տափալկուիթյան որոշ շափանիշներ:

որոնք ընդհանրացնում են օղակի վրաի մոդուլների համար համապատասխան հայտնի չափանիշները:

Տրվում է ռեզուլյար պրեդադիտիվ կատեգորիաների քննադրումը գլխավոր և վերջավոր ծնված իդեալների միջոցով:

Կլխավոր արդյունքն է՝ փոքր պրեդադիտիվ π կատեգորիան ռեզուլյար է այն և միայն այն դեպքում, երբ բոլոր π -մոդուլները տափակ են:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ M. Harada, Osaka J. Math., 10, 3, 585—596. (1973). ² И. Ламбек, Кольца и модули, М., „Мир“, 1971. ³ B. Mitchell, Adv. Math., 8, 1—161 (1972). ⁴ S. Harari, Cah. top. et geom. diff., 12, 1, 3—27 (1971). ⁵ G. Weidenfeld, M. Weidenfeld, C. r. Acad. sci., A 275, 2, 89—91 (1972).