ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXII 1976 1

УДК 519.95

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. В. Петросян, Ш. Е. Бозоян

Об одном логическом методе повышения надежности схем

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 20/X 1975)

В [1] рассмотрена задача повышения надежности схем, реализующих булевы функции и построенных на произвольных базисных ненадежных элементах. «Ненадежность» в элементах выражалась в превращении их (с некоторой вероятностью) в устройство, реализующее одну из константных функций 0 или 1. Идея способа повышения надежности таких схем заключалась в первоочередном дублировании тех более «активных» элементов, от которых в основном зависит надежность схемы в целом. Считалось, что элемент «голосователь» работает абсолютно надежно.

В настоящей заметке решается аналогичная задача для схем, реализующих произвольный конечный автомат из достаточно широкого класса автоматов. Понятие «ненадежности» элементов здесь употребляется в более широком смысле.

Пусть A конечный автомат, для которого множества X, Y и C—множества соответственно входных, выходных сигналов и состояний, а $\delta(c, x)$ и $\lambda(c, x)$ —функции переходов и выходов.

Пусть элементы $x \in X$, $y \in Y$ и $c \in C$ закодированы двоичными наборами $\tilde{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, $\tilde{y}=(y_1, \ldots, y_s)$ и $\tilde{c}=(c_1, \ldots, c_e)$ соответственно. В дальнейшем записи $\tilde{x}$ и x, $\tilde{y}$ и y, $\tilde{c}$ и c будем отождествлять. Автомату A сопоставим некоторую схему S_A, имеющую n входов и s выходов. Пусть она построена из N логических и e запоминающих элементов, которые обозначим через $X_1, \ldots, X_N$ и $X_{N+1}, \ldots, X_{N+e}$ соответственно. Относительно логических элементов предположим, что реализуют булевы функции, а запоминающие элементы выполняют функции линии задержки одного бита информации на один такт (т. е. в течение одной единицы времени). Если в запоминающих элементах записана информация $\tilde{c}=(c_1, \ldots, c_e)$, то будем говорить, что схема S_A находится в состоянии $\tilde{c}=(c_1, \ldots, c_e)$.

Будем говорить, что схема S_A относительно входного сигнала x и состояния с реализует автомат A, если при подаче на ее входы набора $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ в данный момент времени, на выходах в тот же момент времени получается набор $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_s)$, который совпадает с $\bar{\lambda}(\mathrm{x}, \mathrm{c})$, а состояние схемы в этот же момент времени совпадает с $\bar{\delta}(\mathrm{x}, \mathrm{c})$*), при условии, что в предыдущий момент времени схема находилась в состоянии c. Схема S_A реализует автомат A, если она реализует автомат A относительно любого входного сигнала $\mathrm{x} \in X$ и любого состояния $\mathrm{c} \in C$.

Событие, при котором схема S_A относительно некоторого входного сигнала и некоторого состояния не реализует автомат A, называется „ошибкой". При этом говорят также, что схема S_A относительно данного входного сигнала и состояния „ошибается".

Пусть каждому логическому элементу X_l $(l = \overline{1, N})$ сопоставлен набор функций $< f_{l,0}, f_{l,1}, \ldots, f_{l,m} >$, $m \geqslant 2$, так, что с вероятностью $p_{l,\sigma}$ X_l превращается в схему, реализующую булеву функцию $f_{l,\sigma}$ $\left(\sigma = \overline{0, m};\ \sum\limits_{\sigma=0}^{m} p_{l,\sigma} = 1;\ p_{l,\sigma} > \frac{1}{2}\right)$, а каждому запоминающему элементу X_{N+j} $(j = \overline{1, e})$ —набор объектов $< f_{N+j,0}, f_{N+j,1}, \ldots, f_{N+j,m} >$, где $f_{N+j,0}$ автомат, выполняющий функции линии задержки ([2]), $f_{N+j,1}$ и $f_{N+j,2}$ соответственно константные функции 0 и 1, а $f_{N+j,\sigma}$, $\sigma \geqslant 3$— произвольные булевы функции. Пусть элемент X_{N+j} $(j = \overline{1, e})$ с вероятностью $p_{N+j,0} > \frac{1}{2}$ превращается в схему, реализующую автомат $f_{N+j,0}$, с вероятностью $p_{N+j,\sigma}$ —в схему, реализующую функцию $f_{N+j,\sigma}$ $(\sigma = \overline{1, m};\ \sum\limits_{\sigma=0}^{m} p_{N+j,\sigma} = 1;\ p_{N+j,3} = \ldots = p_{N+j,m} = 0)$.
Будем говорить, что логический элемент X_l работает „правильно", если он реализует функцию $f_{l,0}$ $(l = \overline{1, N})$, и запоминающий элемент X_{N+j} работает „правильно", если реализует автомат $f_{N+j,0}$ $(j = \overline{1, e})$.

Допустим, если все элементы (как логические, так и запоминающие) схемы S_A работают правильно, то она реализует автомат A.

Если все элементы X_l реализуют соответственно f_{l,σ_l} $(l = \overline{1, N+e})$, то будем говорить, что надежность схемы S_A находится в состоянии $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N, \sigma_{N+1}, \ldots, \sigma_{N+e})$. Схему S_A, находящуюся в состоянии σ обозначим через $S_{A,\sigma}$. Объединение наборов выходов и состояния схемы $S_{A,\sigma}$ в данный момент времени, если на входы в данный момент времени поступил набор $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, а в предыдущий момент вре-

*) Через $\bar{\lambda}(\mathrm{c}, \mathrm{x})$ и $\bar{\delta}(\mathrm{c}, \mathrm{x})$ обозначены двоичные коды $\lambda(\mathrm{c}, \mathrm{x})$ и $\delta(\mathrm{c}, \mathrm{x})$ соответственно.

мени она находилась в состоянии $\bar{c}=(c_1, \ldots, c_e)$, обозначим через

$$S_{A,\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \langle \bar{l}_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{c}), \bar{\delta}_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \rangle^{*)}.$$

Предположим, что ошибки в различных элементах схемы статистически независимы. Тогда вероятность того, что надежность схемы S_A находится в состоянии σ, равна $p(\sigma) = \prod_{l=1}^{N+e} p_{l,\sigma_l}$, а вероятность того, что схема S_A ошибается, при условии, что в предыдущий момент времени она находилась в состоянии $\mathbf{c}$, и в данный момент времени на входы поступил набор $\bar{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ равна

$$P(\bar{A}/S_A, \mathbf{c}, \mathbf{x}) = \sum_{\{\sigma\}} [S_{A,\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \oplus S_{A,0}(\mathbf{x}, \mathbf{c})] \cdot p(\sigma),$$

где сумма берется по всем состояниям σ надежности схемы S_A, 0 — нулевое состояние надежности, при котором все элементы схемы работают правильно, $\oplus$ —знак бинарной операции, которая определена на множестве всевозможных наборов $\bar{z}=(z_1, \ldots, z_{s+e})$ из нулей и единиц следующим образом:

$$\tilde{z} \oplus \tilde{z}' = \begin{cases} 0, \text{ если } \bar{z} = \bar{z}' \\ 1, \text{ если } \bar{z} \neq \bar{z}'. \end{cases}$$

Складывая условные вероятности по всем входным сигналам $\mathbf{x} \in X$, считая, что задана функция $q(\mathbf{x})$ распределения вероятностей появления этих сигналов, получим вероятность того, что схема S_A в данный момент времени ошибается, при условии, что в предыдущий момент времени она находилась в состоянии $\mathbf{c}$:

$$P(\bar{A}/S_A, \mathbf{c}) = \sum_{\mathbf{x} \in X} P(\bar{A}/S_A, \mathbf{c}, \mathbf{x})\, q(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Пусть относительно функции $q(\mathbf{x})$ автомат A является сильносвязанным, т. е. для любых двух элементов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}'$ из C существует натуральное число t такое, что $p^{(t)}_{\mathbf{c}',\mathbf{c}} > 0$, где $p^{(t)}_{\mathbf{c}',\mathbf{c}}$ есть вероятность того, что автомат A из состояния $\mathbf{c}'$ через точно t шагов переходит в состояние $\mathbf{c}$. Из теории дискретных цепей Маркова известно ([3]), что при этом существует предел Чезаро:

$$\lim_{t \to \infty} p^{[t]}_{\mathbf{c}',\mathbf{c}} = p_{\mathbf{c}}, \quad \sum_{\mathbf{c} \in C} p_{\mathbf{c}} = 1,$$

который не зависит от первого индекса $\mathbf{c}'$, где $p^{[t]}_{\mathbf{c}',\mathbf{c}} = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{t} p^{(k)}_{\mathbf{c}',\mathbf{c}}$. Из

*) Здесь принято обозначение $\langle\langle y_1, \ldots, y_s\rangle, \langle c_1, \ldots, c_e\rangle\rangle = \langle y_1, \ldots, y_s, c_1, \ldots, c_e\rangle$.

очевидного равенства $p^{(t)}_{c'',c} = \sum_{c\in C} p^{(t-1)}_{c'',c} \cdot p^{(1)}_{c',c}$

следует $p^{[t]}_{c'',c} = \dfrac{p^{(1)}_{c'',c}}{t+1} + \dfrac{t}{t+1} \sum_{c'\in C} p^{[t]}_{c'',c'} \cdot p^{(1)}_{c',c'}$

откуда и при $t \to \infty$ получим

$$p_c = \sum_{c'\in C} p_{c'} \cdot p^{(1)}_{c',c}; \quad c \in C; \quad \sum_{c\in C} p_c = 1. \tag{2}$$

Естественно полагать, что после длительной работы автомат A будет находиться в состоянии c с вероятностью $p_c (c \in C)$. Естественно полагать также, что схема S_A после длительной работы также будет находиться в состоянии c с вероятностью $p_c (c \in C)$. Реалистичность последнего допущения следует из того, что предел (2) не зависит от первого индекса, и в промежутке времени, заключенном между двумя соседними ошибками, эти ошибки „забываются".

Итак, за вероятность ошибки схемы S_A принимается число

$$P(\overline{A}/S_A) = \sum_{c\in C} P(\overline{A}/S_A, c) p_c. \tag{3}$$

Наша конечная цель заключается в достижении требуемой надежности схемы при минимальной затрате (по стоимости) избыточной аппаратуры путем дублирования и надежного голосования выходов некоторых элементов.

Введем обозначения:

$$\sigma((i_1, \sigma_{i_1}), \ldots, (i_k, \sigma_{i_k})) = (0, \ldots, 0, \sigma_{i_1}, 0, \ldots, 0, \sigma_{i_k}, 0, \ldots, 0),$$

$$1 \leqslant k \leqslant N+e,$$

$$\Omega_c((i_1, \sigma_{i_1}), \ldots, (i_k, \sigma_{i_k})) = \sum_{x\in X} |S_{A,\sigma((i_1,\sigma_{i_1}),\ldots,(i_k,\sigma_{i_k}))}(x, c) \oplus S_{A,0}(x, c)| \cdot q(x),$$

$$0 = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{N+e \text{ раза}}).$$

Тогда очевидно

$$P(A/S_A, c) = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)} \sum_{(\sigma_{i_k})} [\Omega_c((i_1, \sigma_{i_1}), \ldots, (i_k, \sigma_{i_k})) \cdot \prod_{i\in\{i_1,\ldots,i_k\}} p_{i,\sigma_i} \cdot \prod_{i\bar{\in}\{i_1,\ldots,i_k\}} p_{i,0}],$$

где внутренняя сумма берется по всем m^k наборам $(\sigma_{i_1}, \ldots \sigma_{i_k})$ длины $k (1 \leqslant \sigma_{i_j} \leqslant m;\ j = \overline{1, k})$, внешняя сумма—по всем $2^N - 1$ наборам индексов $(i_1, \ldots, i_k)$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_k;\ 1 \leqslant k \leqslant N+e)$, а запись $i \bar{\in} \{i_1, \ldots, i_k\}$ обозначает $i \in \{1, 2, \ldots, N+e\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$.

Введем дополнительные обозначения: $p = \max_{i,\sigma} p_{i,\sigma}$ $(1 \leqslant i \leqslant N+e;\ 1 \leqslant \sigma \leqslant m)$,

$$\Omega_c(i) = \sum_{\sigma=1}^{m} \Omega_c((i, \sigma)) \cdot p_{i,\sigma},$$

$$\Omega_c(i, \ldots, i_k) = \sum_{(\sigma_{i_1},\ldots,\sigma_{i_k})} [\Omega_c((i_1, \sigma_1), \ldots, (i_k, \sigma_{i_k})) \cdot \prod_{i\in\{i_1,\ldots,i_k\}} p_{i,\sigma_i} \prod_{i\bar{\in}\{i_1,\ldots,i_k\}} p_{i,0}] \quad (k \geqslant 2),$$

$$\Omega(i_1, \ldots, i_k) = \sum_{c \in C} \Omega_c(i_1, \ldots, i_k) p_c \quad (1 \leq k \leq N+e).$$

Очевидно, $\Omega(i)$ является вероятностью того, что элемент X_i ошибается, в результате чего схема S_A ошибается, при условии, что все остальные элементы схемы работают правильно. $\Omega(i)$ называется **активностью** элемента $X_i (1 \leq i < N+e)$.

Выделив линейную часть относительно $p_{i,\sigma} (1 \leq i < N+e;\ 1 < \sigma < m)$, формулу (1) перепишем в следующем виде:

$$P(\overline{A}/S_A, c) = \sum_{i=1}^{N+e} \Omega_c(i) + \varphi(\overline{A}/S_A, c).$$

Теорема. *Если* $mp(N+e) < 1$, то $|\varphi(\overline{A}/S_A, c)| < m^2p^2(N+e)^2$.

Доказательство.

$$\varphi(\overline{A}/S_A, c) = \sum_{i=1}^{N+e} \sum_{\sigma=1}^{m} \left| \Omega_c((i, \sigma)) p_{i,\sigma} \left(\prod_{j \neq i} p_{j,0} - 1 \right) \right| + \sum_{1 < i < j < N} \Omega_c(i, j) + \ldots +$$

$$\sum_{1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_k < N} \Omega_c(i_1, \ldots, i_k) + \ldots + \Omega_c(1, \ldots, N+e) \leq C^2_{N+e} m^2p^2 + \ldots + C^k_{N+e} m^k p^k +$$

$$+ \ldots + C^{N+e}_{N+e} m^{N+e} p^{N+e} = (1+mp)^{N+e} - 1 - mp(N+e) < e^{mp(N+e)} - 1 -$$

$$- mp(N+e) = m^2p^2(N+e)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{mp(N+e)}{6} e^{\theta mp(N+e)} \right),$$

где $0 \leq \theta \leq 1$.

Из условия теоремы следует: $\dfrac{mp(N+e)}{6} e^{\theta mp(N+e)} \leq \dfrac{e}{6} < \dfrac{1}{2}$,

следовательно, $\varphi(\overline{A}/S_A, c) \leq m^2p^2(N+e)^2$.

Для установления факта $\varphi(\overline{A}/S_A, c) \geq -m^2p^2(N+e)^2$ достаточно заметить, что $\sum_{i=1}^{N+e} \sum_{\sigma=1}^{m} \left[\Omega_c((i, \sigma)) \cdot p_{i,\sigma}(\prod_{j \neq i} p_{j,0} - 1) \geq \right| \sum_{i=0}^{N+e} \sum_{\sigma=1}^{m} \Big| \Omega_c((i, \sigma)) \cdot$

$$\cdot (1-mp)^{N+e-1} - 1)p \Big| \geq mp(N+e \Big| (1-mp)^{N+e-1} - 1 \Big| > -m^2p^2(N+e)^2.$$

Из доказанной теоремы и (3) следует

$$\left| P(\overline{A}/S_A) - \sum_{i=1}^{N+e} \Omega(i) \right| \leq m^2p^2(N+e)^2.$$

Таким образом, для вероятности $P(\overline{A}/S_A)$ установили следующие верхние и нижние оценки:

$$P(\overline{A}/S_A) \leq \varepsilon_+ = \sum_{i=1}^{N+e} \Omega(i) + m^2p^2(N+e)^2,$$

$$P(\overline{A}/S_A) \geq \varepsilon_- = \sum_{i=1}^{N+e} \Omega(i) - m^2p^2(N+e)^2.$$

Перейдем теперь к повышению надежности схемы путем дублирования отдельных ее элементов и надежного голосования выходов экземпляров. Задача формулируется следующим образом.

Пусть каждому элементу X_i схемы S_A сопоставлено положительное число c_i $(i=\overline{1, N+e})$ —его „цена". Дублируем элемент X_i кратностью z_i $(z_i \in \{1, 3, 5, \ldots\}; i=\overline{1, N+e})$*). Для полученной схемы S'_A получим вероятность ее ошибки: $P(\overline{A}/S'_A)$.

Требуется найти такие значения $z_1, z_2, \ldots, z_{N+e}$, чтобы $P(\overline{A}/S'_A) \leq \varepsilon_0$, а сумма $\sum\limits_{i=1}^{N+e} c_i z_i$ была минимальной, где ε_0 наперед заданное число.

Эта задача нелинейного программирования, для решения которой не существует общих методов. Однако, мы решим эту задачу приближенным алгоритмом с оценкой погрешности с некоторыми, с точки зрения практики, естественными ограничениями. Точнее, поставленную задачу решим не относительно функции $P(\overline{A}/S_A)$, а относительно ее верхней оценки ε, которая относительно $p_{i,3}$ является линейной функцией, дополнительно предполагая, что выполняется неравенство $9m^2p^2(N+e)^2 < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Предварительно заметим, что после трехкратного дублирования любого элемента X_i его активность станет нулем. Следовательно, более чем трехкратное дублирование вообще не требуется. Далее, поскольку при дублировании элементов число элементов в схеме увеличивается, то максимальным числом элементов в схеме будем считать $3(N+e)$**). Введем обозначение: $\Omega^*(i)=\frac{1}{2}\,\Omega(i)(3-z_i)$.

Итак, требуется найти такие значения $z_1, z_2, \ldots, z_{N+e}$, чтобы выполнялось неравенство $\sum\limits_{i=1}^{N+e} \Omega^*(i) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при минимизации линейного функционала $\sum\limits_{i=1}^{N+e} c_i z_i$ $(z_i \in \{1; 3\};\ i=\overline{1, N+e})$.

Вводя обозначение $u_i=\frac{1}{2}(z_i-1)$, $i=\overline{1, N+e}$, получим задачу линейного программирования с булевыми переменными [4]: надо найти такие значения для $u_1, u_2, \ldots, u_{N+e}$ $(u_i \in \{0; 1\};\ i=\overline{1, N+e})$, чтобы выполнялось неравенство $\sum\limits_{i=1}^{N+e} \Omega(i)u_i \geq \sum\limits_{i=1}^{N+e} \Omega(i)-\frac{\varepsilon_0}{2}$, при минимизации функционала $\sum\limits_{i=1}^{N+e} c_i u_i$.

Для оценки (сверху) лишней затраты относительно первоначально поставленной задачи (т. е. относительно требования $P(\overline{A}/S'_A) \leq$

*) При $z_i=1$ элемент X_i фактически не дублируется.

**) Устройство голосования не считается элементом, поскольку оно, по предположению, работает абсолютно надежно и в наших расчетах не фигурирует.

ε_0) достаточно решить эту задачу относительно нижней оценки ε и вычислить разность значений функционала $\sum_{i=1}^{N+c} c_i z_i$ для ε_+ и ε_-.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Ա. Վ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Շ. Ե. ԲՈԶՈՅԱՆ

Սխեմաների հուսալիության բարձրացման մի տրամաբանական մեթոդի մասին

Դիտված է S մուտք և n ելք ունեցող սխեմա, որը հավաքված է ֆիքսված բազիսային (տրամաբանական և հիշող) էլեմենտների վրա և իրականացնում է վերջավոր ավտոմատ։

Սխեմայում օգտագործված յուրաքանչյուր տրամաբանական (հիշող) էլեմենտի համար նշված է նրա՝ այս կամ այն ֆունկցիան (ավտոմատը) իրականացնող սխեմայի վերածվելու հավանականությունների բաշխումը, ինչպես նաև որոշակի դրական թիվ՝ նրա գինը։

Սահմանվում է սխեմայի սխալվելու գաղափարը և կախված նշված հավանականություններից ու նրա մուտքին տրված ազդանշանների համախմբությունների հանդես գալու հավանականությունների բաշխումից որոշվում է սխեմայի սխալվելու հավանականությունը։ Որոշ բնական ենթադրությունների դեպքում լուծվում է մինիմալ ծախսով լրացուցիչ էլեմենտներ ավելացնելով սկզբնական սխեմայից նույն ավտոմատն իրականացնող, բայց պահանջված հուսալիությամբ աշխատող սխեմա ստանալու խնդիրը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ш. Е. Бозоян*, ДАН Арм. ССР, т. LX, № 2 (1975). [2] *В. М. Глушков*, Синтез цифровых автоматов, Физматгиз, 1962. [3] *Чжун Кай-лай*, Однородные цепи Маркова, Изд. «Мир», М., 1964. [4] *А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн*, Дискретное программирование, «Наука», 1969.