ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXII 1976 1

УДК 518.5 : 519.1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Азатян

Об алгоритмах для перечисления элементов полных множеств: n- перестановок с повторениями, сочетаний из n элементов по m, размещений из n элементов по m

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Ф. Т. Саркисяном 18/VII 1975)

В([1]) рассматривается метод перечисления элементов множества всех возможных перестановок из n различных символов $\{P_n\}$, названный „методом треугольника адресов" и отличающийся от известных ([2-4]) тем, что использование управляющей матрицы (треугольника адресов) дает возможность почти полного исключения арифметических операций, резкого сокращения количества команд и существенного уменьшения объема памяти. В ([1]) метод треугольника адресов распространяется на более общий случай—перечисление элементов множества $\{P'_n\}$ —всех перестановок из n символов, среди которых имеются одинаковые. В настоящей работе показывается, что с использованием специально определенных логических функций алгоритм для перечисления элементов $\{P_n\}$ может стать основным звеном также для конструирования алгоритмов для перечисления элементов множеств: всех сочетаний по m из n $\{C_n^m\}$, всех размещений по m из n $\{A_n^m\}$, и, таким образом, для перечисления элементов списков всех элементарных комбинаторных объектов, имеется единый метод, основывающийся на методе треугольника адресов. Для описания алгоритмов рассмотрим ряд соотношений и определений.

В ([1]) последовательность адресов A^n_{qk}, соответствующая процессу перечисления элементов $\{P_n\}$, составляет циклическую структуру, которую можно разбить на следующие подпоследовательности: $(n-1)!$ подпоследовательностей по $(n-1)$ q_n —адресов односмежных транспозиций n-ого элемента первоначальной n —перестановки со всеми остальными $(n-1)$ элементами; $(n-2)!$ подпоследовательностей по $(n-2)$ q_n — адресов односмежных транспозиций $(n-1)$-ого элемента первоначальной n-перестановки со всеми $(n-2)$ элементами, исключая n-ый элемент; ... 2! подпоследовательностей по два q_n —адреса односмежных транспозиций 3-го элемента первоначальной n-перестановки со вторым и первым элементами первоначальной n- перестановки; наконец, один q_n —адрес односмежной транспозиции второго элемента с первым элементом первоначальной n-перестановки. Каждую из вышерассмотренных $(n-1)!$ подпоследовательностей последовательности q_n —адресов назовем „циклом n-го порядка C_n"; каждую из $(n-2)!$ подпоследовательностей — „циклом $(n-1)$-ого порядка C_{n-1}"; ... каждую из $(n-s-1)!$ подпоследовательностей — „циклом $(n-s)$-ого порядка C_{n-s}"; ...; наконец, подпоследовательность, состоящую из одного адреса — „циклом второго порядка C_2". Назовем n-ый (по индексу i) элемент некоторой первоначальной n —перестановки „ведущим элементом цикла C_n"; $(n-1)$-ый элемент — „ведущим элементом цикла C_{n-1}"; ...; второй элемент — „ведущим элементом цикла C_2". Будем обозначать также эти элементы в соответствии с принадлежностью i'-ым индексам i, q, j, k —каркаса ([1]) при $j=1$ и $i'=1, 2, \ldots, n$ через ${}_1\alpha(i, j)$, ${}_2\alpha(i, j)$, ..., ${}_n\alpha(i, j)$, где i, j — аргументы, указывающие место элемента на сетке (i, j), а i' —зафиксированный при $j=1$ i-ый аргумент.

Всякую первоначальную n —перестановку с распределением ([1,5]) $(n$; $n_1=2$, $n_2=n_3=\ldots=n_v=1)$, равночисленные элементы в которой являются ведущими элементами циклов C_i и C_{i-u}, будем обозначать через $n-(C_i, C_{i-u})$ —перестановку. Возьмем некоторую $n-(C_{i'}, C_{i'-u'})$ —перестановку (i' и $i'-u'$ —аргументы ведущих элементов при $j=1$) и, последовательно изменяя значения аргумента $k (k=1, 2, \ldots, n!)$, будем сопоставлять каждой паре аргументов i_1, j ведущего элемента цикла $C_{i'}$ его величину ${}_{i'}\alpha(i_1, j)$ и каждой паре аргументов i_2, j ведущего элемента цикла $C_{i'-u'}$ его величину ${}_{i'-u'}\alpha(i_2, j)$. Множество всех пятерок чисел, состоящих из аргумента k (при $k=j$), соответствующих j аргументов i_1 и i_2 и соответствующих i_1, i_2, и j величин ${}_{i'}\alpha(i_1, j)$ и ${}_{i'-u'}\alpha(i_2, j)$, назовем „(i', u') — массивом аргументов". Над (i', u') —массивом аргументов определим функцию $\Phi_1^{i', u'}(k)$, удовлетворяющую условиям:

$$\Phi_1^{i', u'}(k) = \begin{cases} 0, \text{ если при } \beta(q, k) = 1 (i_1 = (n-q) \,\&\, i_2 = (n-q+1)) \vee \\ \qquad \vee (i_2 = (n-q) \,\&\, i_1 = (n-q+1)); \\ 1, \text{ если при } \beta(q, k) = 1 ((i_1 \,\&\, i_2) \neq ((n-q) \,\&\, (n-q+1)) \vee \\ \qquad \vee (i_1 = (n-q) \,\&\, i_2 \neq (n-q+1)) \vee i_1 \neq \\ \qquad \neq (n-q) \,\&\, i_2 = (n-q+1)). \end{cases} \tag{1}$$

Пусть t —последовательность значений некоторой функции $\Phi_1^{i'_v, u'_v}(k)$ (i'_v, u'_v—одно из всевозможных сочетаний пар аргументов i'_v и $i'_v-u'_v$ элементов из группы равночисленности $|n_v|$), расположенных по мере возрастания $k (k=1, 2, \ldots, t; t \leq n!)$ по направлению процесса перечисления, разбита (без изменения порядка расположения элементов) на подпоследовательности, в первую из которых входят первое из нулевых значений и все предшествующие нулевому единичные значения функции, во вторую—второе из нулевых значений и все единичные значения функции, начиная с первого единичного после первого нулевого значения функции, ..., наконец, в последнюю — либо последнее нулевое и все единичные значения функции, либо все единичные значения после последнего нулевого значения функции. Пронумеруем все подпоследовательности в направлении процесса перечисления с помощью чисел из натурального ряда, начиная с единицы (при этом, если $\Phi_1^{i'_v, u'_v}(t) \neq 0$ при $t = n!$, примем, что последняя подпоследовательность имеет номер „единица"), и каждому нечетному (четному) номеру сопоставим индекс $\gamma_1^{i',u',v} = 1$ ($\gamma_1^{i',u',v} = 0$). Последовательность, составленную из пар аргументов, каждая из которых образована из сопоставления индекса $\gamma_1^{i',u',v}$ с одним из сопоставимых k — аргументов функции $\Phi_1^{i'_v, u'_v}(k)$, назовем „массивом аргументов $(\gamma_1^{i',u',v}, k)$". Над массивом $(\gamma_1^{i',u',v}, k)$ определим функцию $G_1(\gamma_1^{i',u',v}, k)$ следующим образом:

$$G_1(\gamma_1^{i',u',v}, k) = \begin{cases} 1, \text{ если при } k, \text{ соответствующем } \gamma_1^{i',u',v}, \; \gamma_1^{i',u',v} = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 1; \\ 0, \text{ если при } k, \text{ соответствующем } \gamma_1^{i',u',v}, \; \gamma_1^{i',u',v} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Введем также функцию $G_1^*(k)$, определив ее из равенства:

$$G_1^*(k) = \prod_{v=1}^{v=v} \prod_{\{i'_v, u'_v\}} G_1(\gamma_1^{i',u',v}, k), \quad (3)$$

где $\{i'_v, u'_v\}$ означает, что произведение берется по всем элементам множества $\{i'_v, u'_v\}$ — множества всех возможных сочетаний пар аргументов i'_v и $i'_v - u'_v$ — элементов из группы $\{n_v\}$.

Алгоритм для перечисления элементов $\{C_n^2\}$ (Алгоритм AC_n^2).

1. Из множества n различных символов $(A, B, C, \ldots, K)$ составить внешнюю относительно процесса перечисления ([1]) p — последовательность $(n = p)$.
2. Последовательности, построенной в п. 1, сопоставить последовательность из p символов: $1, 2, \ldots, p$.
3. Выбрать из последовательности, построенной в п. 2, пару элементов $(1, p)$ и построить n — последовательность: $10 \ldots p$.
4. Пошагово (с каждым k-ым шагом увеличению k соответствует увеличение q на i, q, j, k — каркасе ([1]) переставлять элемент p с остальными элементами последовательности $10 \ldots p$ вплоть до $(n-2)$-ого шага включительно.
5. Каждому k-ому шагу п. 4 сопоставить соответствующую ему пару элементов из внешней p — последовательности, построенной в п. 1:

$$(1, p) \leftrightarrow (A, K), \ldots, (1, 3) \leftrightarrow (A, C), (1, 2) \leftrightarrow (A, B).$$

6. Аналогично п. 3 для пары $(2, p)$.
7. Аналогично п. 4 для пар: $(2, p), (2, p-1), \ldots, (2, 3)$.

8. Аналогично п. 5 для пар: (2, p), (2, $p-1$), ..., (2, 3).

Процесс алгоритма продолжить аналогично пунктам: 3—5 и 6—8, вплоть до пары ($p-1$, p).

Алгоритм перечисления элементов $\{P'_n\}$ при распределении (n; n_1 n_2, ..., n_v) (Алгоритм AP'_n) (На рис. 1 описывается пример при распределении (4; 3, 1)).

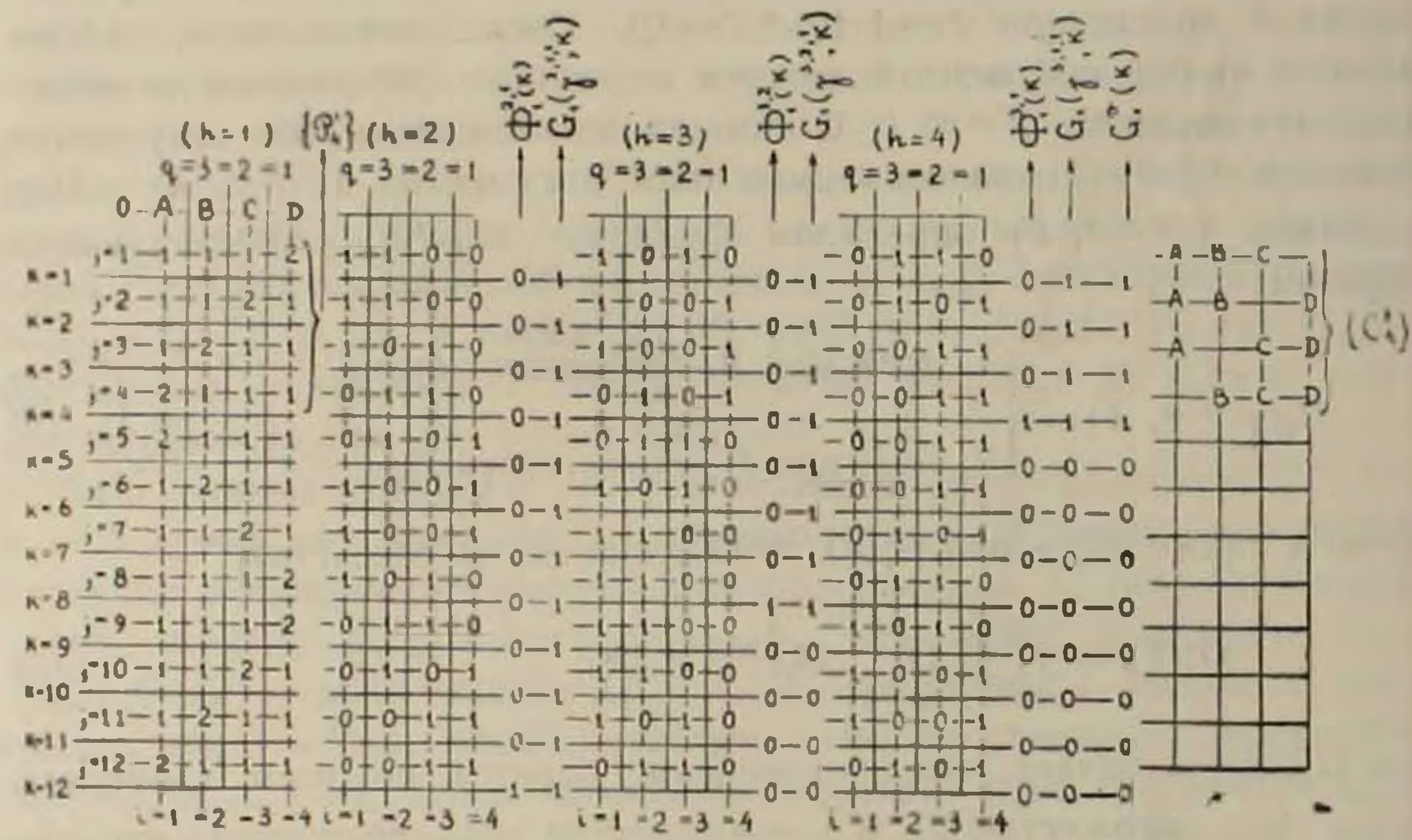

Рис. 1. Перечисление элементов $\{P'_4\}$ при распределении (4; 3, 1) и перечисление элементов $\{C^3_4\}$ на i, q, j, k—каркасах (h = 1, 2, 3, 4)

1. Распределить элементы n —последовательности по группам равночисленности ([1,5]) $\{n_v\}$.
2. Используя алгоритм AC^2_n и результат п. 1, составить все $n-(C_{i_v}\cdot, C_{i_v-u_v}\cdot)$ —последовательности.
3. Расположить рядом h ($h=m+1$, m —число всех различных $n-(C_{i_v}\cdot, C_{i_v-u_v}\cdot)$ —последовательностей) i, q, j, k —каркасов с $i=1, 2, \ldots, n$ в порядке возрастания индекса h
4. На первой строке ($j=1$) первого ($h=1$) i, q, j, k —каркаса расположить n —последовательность, распределенную в соответствии с п. 1; на первой строке второго i, q, j, k—каркаса (j=1, h=2)— первую из $n-(C_{i_v}\cdot, C_{i_v-u_v}\cdot)$ —последовательностей на первой строке третьего i, q, j, k —каркаса—вторую из $n-(C_{i_v}\cdot, C_{i_v-u_v}\cdot)$—последовательностей, ...
5. Используя алгоритм перечисления элементов $\{P_n\}$ ([1]), перечислит

пошагово $\frac{n!}{2}$ элементов, принимая в качестве первоначальных n — перестановок ([1]) каждую из n — последовательностей, расположенных на каждой первой строке i, q, j, k — каркасов, построенных в п. 4.

6. В соответствии с каждым k-ым шагом п. 5 вычислять значения функции $\Phi_1^{i',u'}(k)$ (1) для всех первоначальных n — перестановок.
7. В соответствии с каждым k-ым шагом вычислять значения функции $G_1(\gamma^{i',u',v}, k)$ (2).
8. В соответствии с каждым k-ым шагом вычислять значения функции $G_1^{\tau}(k)$ (3).
9. В соответствии с каждым k-ым значением функции $G_1^{\tau}(k)$ выбирать или отбрасывать перечисляемые из расположенной на первом i, q, j, k — каркасе первоначальной n — перестановки перестановки с повторениями.

Алгоритм перечисления элементов $|C_n^m|$ (Алгоритм AC_n^m)

1. Из множества m различных символов составить внешнюю относительно процесса перечисления p — последовательность ($p=n$): $ABC \ldots K$ и расположить p — последовательность на нулевой строке ($j=0$) первого по индексу h i, q, j, k — каркаса.
2. Из множества m единиц и $n-m$ нулей построить n — последовательность, расположив в ней элементы по группам равночисленности ([1,5]), и расположить n — последовательность на первой строке ($j=1$) первого по аргументу h i, q, j, k — каркаса.
3. Выбирая в качестве первоначальной n — перестановки последовательность, расположенную в соответствии с п. 2, перечислить все n — перестановки с повторениями, используя для этого алгоритм AP_n'.
4. Каждой n — перестановке, осуществляемой на каждом k-ом шаге в процессе перечисления п. 3, взаимно-однозначно сопоставить соответствующую ей m-ку символов из p — последовательности, выбирая для составления m-ки все те и только те символы, которым соответствуют единицы в k-ой n — перестановке.

Алгоритм перечисления элементов $|A_n^m|$ (Алгоритм AA_n^m)

1. Из множества n различных символов ($A, B, C, \ldots, K$) составить внешнюю относительно процесса перечисления p — последовательность ($p=n$), и расположить p — последовательность на нулевой строке ($j=0$) первого по индексу h i, q, j, k — каркаса.
2. Из множества m единиц и $n-m$ нулей построить n — последовательность, расположив в ней элементы по группам равночисленности, и расположить n — последовательность на первой строке ($j=1$) первого по аргументу h i, q, j, k — каркаса.
3. Используя алгоритм AC_n^m и результаты п. п. 1 и 2, перечислить все элементы $|C_n^m|$.

4. Расположить каждый из элементов $\{C_n^m\}$ на $\|C_n^m\|$ i, q, j, k —каркасах.
5. Рассматривая каждый из элементов $\{C_n^m\}$ в качестве первоначальной m —перестановки, перечислить на каждом i, q, j, k —каркасе п. 4 все элементы из соответствующих $\{P_m\}$, используя для этого алгоритм AP_n при $n=m$.

Ереванский НИИ математических машин

Ա. Հ. ԱԶԱՏՅԱՆ

Տեղափոխությունների, զուգորդությունների և տեղաբաշխությունների լրիվ բազմությունների թվարկման ալգորիթմների մասին

Ամեն մի ամբողջական n-ի համար տրվում են n-տեղափոխությունների, n-ից m-ական էլեմենտներով զուգորդությունների և n-ից m-ական էլեմենտներով տեղաբաշխությունների լրիվ բազմությունների թվարկման ալգորիթմներ։ Ցույց է տրվում, որ հատուկ տրամաբանական ֆունկցիաների օգտագործման շնորհիվ, կարելի է տալ այդ ալգորիթմների կառուցման մի միասնական մեթոդ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Азатян.* К вопросу о перечислении элементов полного множества ассоциаций $\{U\}$. Депонированная рукопись, 1974. РИР, № 3, 3—697, 1975. [2] *D. H. Lehmer*, Applied Combinatorial Mathematics, E. F. Beckenback, Ed., Wiley New—York, p. p. 5—31, 1964. [3] *S. M. Johnson*, Math. Computing, 17(1963), p. p. 282—285. [4] *K. Harada*, „Communs ACM", June, 14, №6, 1971. [5] *Л. А. Азатян*, ДАН Арм. ССР, т. LVI, №4 (1973).