ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXII 1976 1

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Шамоян

# Теорема вложения в пространствах $n$- гармонических функций и некоторые приложения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 8/XII 1975)

1°. Пусть $U^n$—открытый поликруг в $C^n$, $T^n$—его остов, $h^p(U^n)$ пространство всех $n$-гармонических функций $u$ в $U^n$, для которых

$$\| u \|_{h^p(U^n)} = \sup_{0<r<1} \left( \int_{T^n} |U(rw)|^p \, dm_n(w) \right)^{1/p*} < +\infty.$$

$H^p(U^n)$—подпространство $h^p(U^n)$ состоящее из голоморфных функций в $U^n$. В этой заметке будут получены:

а) характеристика тех неотрицательных борелевских мер $\mu$ на единичном круге $U=U^1$, для которых оператор $Du(z)=u(z, z, \ldots, z)$, $z\in U$ отображает $h^p(U^n)$ в пространство $L^p(U, d\mu)$, при $1<p<+\infty$ и $H^p(U^n)$ в пространство $L^p(U, d\mu)$, при $0<p<+\infty$.

б) Используя указанный результат и интегральное представление М. М. Джрбашяна классов $B^p$ (см. [1]), будет получена полная характеристика тех аналитических функций $f$ в $U$, для которых существует $F\in H^p(U^n)$, $0<p<+\infty$ так, что $f(z)=DF(z)$.

Отметим по этой тематике известную работу Хёрмандера [2], где описан класс тех неотрицательных мер $\mu$ на строго псевдовыпуклой области $\Omega\subset C^n$, для которых

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \leqslant C \int_{(\partial\Omega)} |f|^p \, dm_n, \quad f\in H^p(\Omega)$$

При доказательстве этой оценки Хёрмандером существенно используется строгая псевдовыпуклость области $\Omega$. Однако, как известно, поликруг не только не является такой областью, но и биголоморфно не отображается на область такого типа (см. [3]).

Рудин в своей монографии [4] доказал, что если $f\in H^2(U^2)$, то $Df\in B^2$, и обратно для любой $\varphi\in B^2$ существует $f\in H^2(U^2)$, такая, что $Df=\varphi$. Рудиным была поставлена проблема: „найти аналоги этому для других $n>2$ и $0<p<+\infty$" (см. [4] стр. 49). Им было доказа-

* Здесь как и всюду ниже $dm_n(w)$—будет обозначать нормированную $n$-мерную меру Лебега на $T^n$.

но (исходя из обобщения теоремы Харди-Литтлвуда), что из $f\in H^1(U^2)$ $\to DF\in B^1$. Здесь же была поставлена задача, отображает ли оператор $D$ $H^1(U^2)$ на $B^1$ (см. ([4]) стр. 65)? В заметке будут получены ответы на эти вопросы Рудина.

2°. Пусть $\Delta_l^\varphi=\left\{z:1-l<|z|<1,\ \varphi-\frac{l}{2}<\arg z<\varphi+\frac{l}{2}\right\}$.

Теорема 1. *Пусть $\mu$—неотрицательная мера на $U$ такая, что*

$$\mu(\Delta_l^\varphi)\leqslant Cl^{n*},\ -\pi<\varphi\leqslant\pi,\quad 0<l<1. \tag{1}$$

*Тогда существует такое положительное число $C(p)$, что*

$$\iint_U |Du|^p\,d\mu\leqslant C(p)\,\|u\|^p_{h^p(U^n)},\quad 1<p<+\infty. \tag{2}$$

*и обратно, если для некоторого $p_0$ выполняется* (2), *то $\mu$ удовлетворяет условию* (1).

Замечание: Простые примеры показывают, (например $d\mu(r,\varphi)=$ $=(1-r)^{n-2}rdrd\varphi$ $u(z)=P(z,1)$, $z\in U^n$, $p$—ядро Пуассона для $U^n$), что при $p=1$ утверждение теоремы не справедливо.

Наметим ход доказательства теоремы 1.

Исходя из интерполяционной теоремы Марцинкевича достаточно доказать, что оператор $D$ имеет слабый тип (1.1) как оператор действующий из $L^1(T^n)$ в пространство $L^1(U,d\mu)$. С этой целью вводим

$$g_\alpha(r,\varphi)=\sup_{y_1,y_2,\ldots,y_n>(1-r)}\frac{1}{y_1\,y_2\cdots y_n}\int\limits_{\varphi-y_1}^{\varphi+y_1}\int\limits_{\varphi-y_2}^{\varphi+y_2}\cdots\int\limits_{\varphi-y_n}^{\varphi+y_n}f(t_1,\ldots,t_n)\times$$
$$\times\,dm_n(t_1,\cdots,t_n),$$

где

$$\frac{y_j}{y_k}=2^{\alpha_j-\alpha_k},\quad j,k=1,2,\ldots,n;\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in Z_+^n\ f\geqslant 0$$

$\alpha$—фиксировано. Сначала доказывается, что

$$\mu(E_\alpha(a))\leqslant\frac{C}{a}\int\limits_{T^n}f(t)dt, \tag{3}$$

где

$$E_\alpha(a)=\{re^{i\varphi}:g_\alpha(r,\varphi)>a\},\ a>0$$

А в дальнейшем при помощи элементарных оценок ядра Пуассона получается следующая оценка.

$$DU(re^{i\varphi})\leqslant C\sum_{\alpha\in Z_+^n}2^{-|\alpha|}g_\alpha(r,\varphi),$$

где

$$U(z)=\int_{T^n}P(z,w)\,f(w)dm_n(w).$$

---

* $C(\alpha,\beta\ldots)$ в дальнейшем будет обозначать положительное число, зависящее только от $\alpha,\beta\ldots$

Применяя оценку (3), отсюда получаем, что $D$—имеет слабый тип (1.1).

Используя тот факт, что при $f \in H^p(U^n)$, $0 < p < +\infty$, $|f|^{p/2}$—$n$-субгармоническая функция в $U^n$, для которой $n$-гармоническая мажоранта

$$U(z) = \int_{T^n} P(z, w)\,|f(w)|^{p/2} dm_n(w)$$

принадлежит $h^2(U^2)$. Из теоремы 1 немедленно вытекает

Следствие 1. *Если $\mu$—удовлетворяет условию* (1), *то существует положительное число $C$, что имеет место*

$$\iint_U |Df|^p d\mu \leq C \| f \|_{H^p(U^n)}, \quad f \in H^p, \quad 0 < p < +\infty$$

В частности, полагая $d\mu(r, \varphi) = (1-r)^{n-2} r dr d\varphi$ получаем, что $Df \in B^p(n-2)$ при $f \in H^p$, где $B^p(m)$—пространство тех аналитических функций в $U$, для которых

$$\| f \|_{B^p(m)} = \left( \iint_U |f(re^{i\varphi})|^p (1-r)^m r dr d\varphi \right)^{1/p} < +\infty.$$

Теорема 2. *Пусть $f \in B^p(n-2)$, $0 < p < +\infty$, тогда можно построить такую функцию $g \in H^p(U^n)$, что $Dg = f$.*

Доказательство. Пусть сначала $1 \leq p < +\infty$, тогда по теореме М. М. Джрбашяна [1]

$$f(z) = \frac{2n-1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^{2n-2} f(\rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{2n}}.$$

Пусть далее

$$g(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{2n-1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^{2n-2} f(\rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta}{(1-z_1\rho e^{-i\theta})^2 (1-z_2\rho e^{-i\theta})^2 \ldots (1-z_n\rho e^{-i\theta})^2}.$$

Очевидно, что $Dg = f$. Предположим, что функция $\psi \in L^q(T^n)$, причем $\| \psi \|_{L^q} = 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, такая, что

$$\left( \int_{T^n} |g_r(w)|^p dm_n(w) \right)^{1/p} = \int_{T^n} g_r(w) \psi(w) dm_n(w),$$

где

$$g_r(w) = g(rw_1, rw_2, \ldots, rw_n).$$

Тогда получаем

$$\| g_r \|_{L^p(T^n)} \leq \frac{2n-1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-\rho^2)^{n-2} |f(\rho e^{i\theta})| \int_{T^n} P(r\rho e^{-i\theta}, w) |\psi(w)| dm_n \rho d\rho d\theta. \tag{4}$$

Пусть теперь

$$U(z) = \int_{T^n} P(z, w)\,|\psi(w)|\,dm_n(w).$$

Очевидно, что $U \in h^q(U^n)$ (см. ([4])).

Но последний интеграл в (4) можно написать, как $DU(r\rho e^{-i\theta})$, следовательно по теореме 1 $DU \in L^q((1-r)^{n-2}\, r dr d\theta)$. Применяя неравенство Гёльдера в (4) получаем

$$\Big(\int_{T^n} |g_r(w)|^p \, dm_n(w)\Big)^{1/p} \le \frac{2n-1}{\pi} \, \| f \|_{B^p(n-2)} \, \| DU \|_{L^q} \le C(q) \, \| f \|_{B^p(n-2)}$$

Доказательство теоремы при $0<p<1$ основано на следующей лемме.

Лемма. *Пусть* $f \in B^p(m)$, $0<p<+\infty$, $m \geq 0$, *и пусть*

$$\Delta_{k,l} = \left\{ z: 1-\frac{1}{2^l} < |z| < 1-\frac{1}{2^{l+1}}, \quad \frac{k\pi}{2^l} < \arg z < \frac{(k+1)\pi}{2^l} \right\}$$

*тогда*

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{k=-2^l}^{2^l-1} \max_{z \in \Delta_{k,l}} \left( |f(z)|^p (1-|z|)^{m+2} \right) \le C_0 \, \| f \|_{B^p(m)}.$$

Доказательство этой леммы получается из известных рассуждений, приведенных в ([5]).

Предположим теперь, что $f \in B^p(n-2)$, $0<p<1$, тогда из леммы непосредственно следует, что $f \in B^1(\alpha)$ при $\alpha > \frac{n}{p} - 1$ и потому

$$f(z) = \frac{\alpha n - 1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^{\alpha n-2} f(\rho e^{i\theta}) \rho \, d\rho \, d\theta}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha n}}, \qquad \alpha > \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$$

Пусть теперь снова

$$g(z_1, z_2, \ldots z_n) = \frac{\alpha n - 1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^{\alpha n-2} f(\rho e^{i\theta}) \rho \, d\rho \, d\theta}{(1-z_1\rho e^{-i\theta})^{\alpha} \ldots (1-z_n\rho e^{-i\theta})^{\alpha}}.$$

Очевидно, что $Dg = f$. Докажем, что $g \in H^p(U^n)$

$$\int_{T^n} |g_r(w)|^p \, dm_n(w) <$$

$$< \frac{(\alpha n-1)^p}{\pi^p} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{k=-2^l}^{2^l-1} \int_{T^n} \left| \iint_{\Delta_{k,l}} \frac{(1-\rho^2)^{\alpha n-2} f(\rho e^{i\theta}) \rho \, d\rho \, d\theta}{(1-w_1 r\rho e^{-i\theta})^{\alpha} \ldots (1-w_n r\rho e^{-i\theta})^{\alpha}} \right|^p dm_n(w).$$

При помощи элементарных оценок можно доказать

$$\int_{T^n} \left( \iint_{\Delta_{k,l}} \frac{(1-\rho^2)^{\alpha n-2} |f(\rho e^{i\theta})| \rho \, d\rho \, d\theta}{|1-w_1 r\rho e^{-i\theta}|^{\alpha} \ldots |1-w_n r\rho e^{-i\theta}|^{\alpha}} \right)^p dm_n(w) \le C_1 \max_{z \in \Delta_{k,l}} \left( |f(z)|^p (1-|z|)^n \right)$$

Применяя лемму получаем доказательство теоремы и в этом случае.

Следствие 2. (Гальярдо ([6])). *Пусть $f \in H^1(U)$, тогда существуют такие положительные числа $C_1(p)$, $C_2(p)$, что*

$$C_1(p)\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f(e^{i\theta})-f(e^{i\varphi})|^p}{\left|\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|^p}\,d\theta d\varphi \leqslant \|f^{(1)}\|_{B_p} \leqslant$$

$$\leqslant C_2(p)\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f(e^{i\theta})-f(e^{i\varphi})|^p}{\left|\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|^p}\,d\theta d\varphi \quad 1<p<+\infty.$$

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ

## Ներդրման թեորեմ *n*-հարմոնիկ ֆունկցիաների տարածություններում և մի քանի կիրառություններ

*Հոդվածում գտնվում է պայման $U$ միավոր շրջանում տրված $\mu$ դրական չափի վրա, որի դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.*

$$\int\int |Du|^p d\mu \leqslant C\,\|u\|_{h^p(U^n)}, \quad 1<p<+\infty$$

*որտեղ՝*

$$Du(z)=u(z, z, \cdot\cdot\cdot z),\ z\in U$$

*$u$-ն $n$-հարմոնիկ ֆունկցիա է $U^n$-միավոր պոլիշրջանում, որպես այդ թեորեմի հետևանք ստացված է Ու. Ռուդինի մի պրոբլեմի լուծումը։*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Института математики и механики АН Арм. ССР, вып. 2, 1948. [2] *L. Hörmander*, $L^p$ estimates for (pluri-) subharmonic functions, Math. Scand., 20, 65—70 (1967). [3] *Г. М. Хенкин*, ДАН СССР, № 5, 210 (1973). [4] *У. Рудин*, Теория функций в поликруге, Изд. «Мир», 1974. [5] *Ф. А. Шамоян*, «Известия АН Арм. ССР», сер. математика, т. X, № 6 (1975). [6] *E. Gagliardo*, Rend. Sem. Matem. di Padova 27, 284—305, 1957.