

УДК 517.91

МАТЕМАТИКА

Т. И. Арутюнян

Асимптотическое распределение числа собственных значений
 системы дифференциальных уравнений в частных производных

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 3/XI 1975)

Пусть L — самосопряженное расширение в пространстве $H = L^2(R_3; C_4)$ симметрического дифференциального выражения, заданного равенством

$$Lu = \left\{ \sum_{j=1}^3 a_j \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + Q(x) \right\} u = L_1 u + Q(x)u \quad (1)$$

в пространстве $H_0 = C_0^\infty(R_3, C_4)$. Здесь мы обозначили

$$L_1 = \sum_{j=1}^3 a_j \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad Q(x) = p(x)a_4 + q(x)a_5, \quad u = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \\ u_4(x) \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3$$

$p(x)$ и $q(x)$ — вещественнозначные функции, $a_1, \dots, a_5$ — матрицы Дирака ⁽¹⁾, которые, как известно, удовлетворяют условиям (a_j — матрицы 4-го порядка)

а) $a_i a_j = -a_j a_i, \quad i \neq j$ (антикоммутируемость)

б) $a_j^2 = E, \quad j = 1, \dots, 5; E$ — единичная матрица

с) $a_j^* = a_j$ (эрмитовость).

Уравнение $Lu = \lambda u$ в релятивистской квантовой механике называется системой Дирака и описывает движение частицы в поле с потенциалом $Q(x)$. Вид потенциала $Q(x) = p(x)a_4 + q(x)a_5$ диктуется требованием самосопряженности и антикоммутируемости матрицы $Q(x)$ с матрицами a_1, a_2, a_3 , а это требование исходит из связи между импульсом и энергией в релятивистской квантовой механике (см. ⁽¹⁾). Заметим, что выбранный нами вид $Q(x)$ есть наиболее общий вид самосопряженной матрицы, которая антикоммутирует с a_1, a_2 и a_3 (проверяется непосредственно).

Цель работы — указать достаточные условия дискретности спектра оператора L и найти асимптотику числа собственных значений $N(\lambda)$ (см. ниже) при $\lambda \rightarrow \pm\infty$. Главным нашим орудием в исследовании обеих задач будет матрица-функция Грина оператора L .

Матрицу-функцию Грина $G(x, \xi, \lambda)$ оператора L будем искать методом „параметрикс“, т. е. сначала найдем явный вид функции Грина $g_0(x, \xi, \lambda)$ оператора L_0 с „замороженными“ коэффициентами (см. ниже (3)), а затем докажем, что решение интегрального уравнения

$$G(x, \xi, \lambda) = g_0(x, \xi, \lambda) + \int_{R_3} G(x, \eta, \lambda) |Q(\xi) - Q(\eta)| g_0(\eta, \xi, \lambda) d\eta \quad (2)$$

есть функция Грина оператора L .

Итак, пусть $g_0(x, \xi, \lambda)$ есть функция Грина оператора

$$L_0 = L_1 + Q(\xi) = \sum_{j=1}^3 a_j \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + Q(\xi), \quad \xi \in R_3. \quad (3)$$

По определению $g_0(x, \xi, \lambda)$ удовлетворяет условиям

- а) $(L_0 - \lambda E)g_0(x, \xi, \lambda) = \delta(x - \xi);$ (4)
 б) элементы $g_{ij}(x, \xi, \lambda)$, $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ матрицы $g_0(x, \xi, \lambda)$ принадлежат $L^2(R_3)$ по x .

Используя преобразование Фурье, из уравнения (4) получим явный вид матрицы-функции $g_0(x, \xi, \lambda)$

$$g_0(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{i(x(\xi)|x - \xi| + 1)}{|x - \xi|^2} \sum_{j=1}^3 a_j(x_j - \xi_j) + Q(\xi) + \lambda E \right\} \frac{e^{-x(\xi)|x - \xi|}}{|x - \xi|}, \quad (5)$$

где $x(\xi) = x(\xi, \lambda) = \{p^2(\xi) + q^2(\xi) - \lambda^2\}^{1/2}$.

В дальнейшем нам понадобятся оценки норм Гильберта—Шмидта матрицы $g_0(x, \xi, \lambda)$ и ее производных по λ при $\lambda = i\mu$. Используя вид (5), получаем оценки

$$\left\| g_0(x, \xi, \lambda) \right\|_{\lambda = i\mu} \leq \frac{C e^{-(1-\delta)x(\xi)|x - \xi|}}{|x - \xi|^2}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \lambda} g_0(x, \xi, \lambda) \right\|_{\lambda = i\mu} \leq \frac{C e^{-B_1 x(\xi)|x - \xi|}}{|x - \xi|} \left\| \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, \xi, \lambda) \right\|_{\lambda = i\mu} \leq \frac{C e^{-B_n x(\xi)|x - \xi|}}{|x - \xi| x^{n-1}(\xi)}, \quad \text{при } n \geq 2 \quad (6)$$

где δ — произвольно малое положительное число, $0 < B_n < 1$, $C > 0$ (заметим, что в течение всей работы мы одним и тем же C будем обозначать разные постоянные). Кроме этого нам понадобятся также оценки (при $\lambda = i\mu$) ядер

$$K_n(x, \xi, \lambda) = |Q(\xi) - Q(x)| \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, \xi, \lambda).$$

Наложим на $Q(x) = p(x)\alpha_4 + q(x)\alpha_5$ следующие условия

$$1) \quad \| |Q(\xi) - Q(x)| Q^{-a}(\xi) \| \leq A |x - \xi|, \quad \text{при } |x - \xi| \leq 1, \quad \text{где } A > 0, \quad 0 < a < 2 \quad (7)$$

$$2) \quad \|Q(\xi)\| \leq B \|Q(x)\|, \quad \text{при } |x - \xi| \leq 1, \quad B > 0 \quad (8)$$

$$3) \quad \|Q(x)\| \leq K \exp |c_0| |x - \xi| \sqrt{p^2(\xi) + q^2(\xi)}, \quad \text{при } |x - \xi| \geq 1, \quad K > 0, \quad (9) \\ 0 < c_0 < 1.$$

Оценивая при этих условиях ядра $K_n(x, \xi, \lambda)$, получаем оценки

$$\left. \begin{aligned} \|K_0(x, \xi, \lambda)\|_{\lambda=i\mu} &\leq \frac{Ce^{-b_0(\xi)|x-\xi|}}{x^{1-a(\xi)}|x-\xi|^2}, \quad 0 < b_0 < 1, \quad |x-\xi| \leq 1 \\ \|K_1(x, \xi, \lambda)\|_{\lambda=i\mu} &\leq \frac{Ce^{-b_1(\xi)|x-\xi|}}{x^{1-a(\xi)}|x-\xi|}, \quad 0 < b_1 < 1, \quad |x-\xi| \leq 1 \\ \|K_n(x, \xi, \lambda)\|_{\lambda=i\mu} &\leq \frac{Ce^{-b_n(\xi)|x-\xi|}}{x^{n-1-a(\xi)}}, \quad 0 < b_n < 1, \quad |x-\xi| \leq 1, \quad n \geq 2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\|K_n(x, \xi, \lambda)\|_{\lambda=i\mu} \leq \frac{Ce^{-b_n(\xi)|x-\xi|}}{x^{r+n}(\xi)}, \quad |x-\xi| > 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

где r — произвольное натуральное число. Кроме этих оценок можно получить и следующие:

$$\|K_n(x, \xi, \lambda)\|_{\lambda=i\mu} \leq \begin{cases} \frac{C}{x^{n+\alpha}(\xi)} \cdot \frac{e^{-\gamma|x-\xi|}}{|x-\xi|^\alpha}, & |x-\xi| \leq 1, \quad 0 < \gamma < 1, \quad \alpha = a + 1 + \varepsilon \\ \frac{C}{x^{r+n+\varepsilon}} \cdot e^{-\gamma|x-\xi|}, & |x-\xi| > 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (12)$$

За счет выбора достаточно малого ε можно считать, что $\alpha < 3$. Используя оценки (12) легко можно доказать теорему

Теорема 1. Обозначим через X банахово пространство матричных функций $A(x, \xi)$, $x, \xi \in R_3$, с нормой

$$\|A(x, \xi)\|_X = \sup_{\xi \in R_1} \int_{R_1} \|A(x, \xi)\| dx,$$

где $\|\cdot\|$ — норма Гильберта — Шмидта. Рассмотрим в пространстве X операторы N_j , определяемые равенствами

$$N_j A(x, \xi) = \int_{R_1} A(x, \eta) K_j(\eta, \xi, i\mu) d\eta, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Если ядра K_j удовлетворяют оценкам (12), то при достаточно больших μ операторы N_j являются сжимающими в пространстве X .

Используя оценки (6), (10) — (12) можно показать, что при больших $|\lambda|$, $\lambda = i\mu$, интегральное уравнение (2) может быть решено методом итераций и что решение $G(x, \xi, \lambda)$ можно оценить следующим образом (см., например, работу Н. С. Саргсяна ⁽²⁾)

$$\|G(x, \xi, \lambda)\|_{\lambda=i\mu} \leq \|g_0(x, \xi, \lambda)\|_{\lambda=i\mu} + \frac{Ce^{-B_1(\xi)|x-\xi|}}{x^{1-a_1/2}(\xi)|x-\xi|^2} + \frac{Ce^{-B_0|x-\xi|}}{x^r(\xi)},$$

где $0 < B, B_0 < 1$.

Поскольку уравнение (2) можно записать в виде

$$G(x, \xi, \lambda) = g_0(x, \xi, \lambda) + N_0 G(x, \xi, \lambda),$$

а $g_0(x, \xi, \lambda) \in X$ при $\lambda = i\mu$, то из сжимаемости оператора N_0 следует единственность решения уравнения (2).

Лемма 1. *Решение интегрального уравнения (2) есть функция Грина оператора L , т. е. $(L - \lambda E)G(x, \xi, \lambda) = \delta(x - \xi)$.*

Доказательство леммы легко следует из того, что $(L_0 - \lambda E)g_0 = \delta(x - \xi)$ и единственности решения уравнения (2).

Чтобы спектр оператора L был дискретен, достаточно чтобы некоторая степень резольвенты $R_n = (L - \lambda E)^{-n}$ оператора L была вполне непрерывным оператором, а так как

$$R_n f(x) = (L - \lambda E)^{-n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{R_1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \lambda^{n-1}} G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi,$$

то достаточно чтобы производная некоторой степени по λ ядра $G(x, \xi, \lambda)$ была бы ядром Гильберта—Шмидта. Дифференцируя уравнение (2) по λ и решая после каждого дифференцирования полученные уравнения методом итераций (что возможно вследствие оценок (10)—(12), получаем оценки (при $n \geq 2$)

$$\left\| \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} G(x, \xi, \lambda) \right\|_{\lambda = i\mu} \leq \left\| \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, \xi, \lambda) \right\|_{\lambda = i\mu} + \frac{C e^{-E_n(\xi)|x-\xi|}}{x^{n-1-a/2}(\xi)|x-\xi|} + \frac{C e^{-B_n|\xi|}}{x^{r+n}(\xi)} \quad (13)$$

Теорема 2. *Если матрица $Q(x)$ удовлетворяет условиям 1—3, а также условию*

4) $p^2(x) + q^2(x) > c|x|^\varepsilon$, $c > 0$, ε — произвольное положительное число, *то спектр оператора L дискретен.*

Доказательство. Используя (13) и (6) получаем

$$\int_{R_2} \int_{R_2} \left| \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} G(x, \xi, \lambda) \right|_{\lambda = i\mu} dx d\xi \leq C \int_{R_2} \frac{d\xi}{x^{n+1}(\xi)} \leq C \int \frac{d\xi}{[p^2(\xi) + q^2(\xi)]^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (14)$$

Выберем n настолько большим, чтобы $\frac{n+1}{2} \varepsilon > 3$. Тогда последний

интеграл в (14) сходится, а это значит, что $\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} G(x, \xi, \lambda)$ есть ядро Гильберта—Шмидта, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Если $Q(x)$ удовлетворяет условиям 1—3, а также условию*

$$4^1. \quad c|x|^\varepsilon < p^2(x) + q^2(x) < C|x|^\varepsilon, \quad 0 < c < C, \quad \varepsilon > 0 \quad (15)$$

то при достаточно больших нечетных n и $\lambda = i\mu$, $\mu \rightarrow \infty$

$$\int_{R_1} \operatorname{sp} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} G(x, x, \lambda) dx \sim \int_{R_1} \operatorname{sp} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g_0(x, x, \lambda) dx. \quad (16)$$

Асимптотика $N(\lambda)$.

Обозначим через $\lambda_{\pm 1}, \lambda_{\pm 2}, \dots, \lambda_{\pm n}, \dots$ собственные значения оператора L , а через $N_+(\lambda) = \sum_{0 < \lambda_n < \lambda} 1$ и $N_-(\lambda) = \sum_{\lambda < \lambda_{-n} < 0} 1$ соответственно число собственных значений, меньших $\lambda > 0$ и больших $\lambda < 0$. Из общей теории самосопряженных операторов следует, что если оператор имеет чисто дискретный спектр, то

$$\int_{R_1} \operatorname{sp} \frac{\partial^n}{\partial z^n} G(x, x, z) dx = n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dN(\lambda)}{(\lambda - z)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

где, в нашем случае, $z = i\mu$, а

$$N(\lambda) = \begin{cases} N_+(\lambda), & \lambda > 0 \\ -N_-(\lambda), & \lambda < 0. \end{cases}$$

Далее мы будем предполагать, что

$$c|x|^a < p^2(x) + q^2(x) < C|x|^a, \quad (18)$$

где $a > 6$, $0 < c < C$. Заметим также, что используя вид матрицы $g_0(x, \xi, \lambda)$ получим выражение для следа

$$\operatorname{sp} \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} g_0(x, x, \lambda) = \frac{3}{\pi} \frac{[p^2(x) + q^2(x)]^2}{[p^2(x) + q^2(x) - \lambda^2]^{5/2}}. \quad (19)$$

Лемма 3. Положим при $\lambda > 0$

$$\psi(\lambda) = \frac{2}{3\pi} \int \int \int_{\substack{p^2(x) + q^2(x) < \lambda^2}} |\lambda^2 - p^2(x) - q^2(x)|^{3/2} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (20)$$

и $\psi(-\lambda) = -\psi(\lambda)$. Тогда при $z = i\mu$ имеет место равенство

$$\int_{R_1} \operatorname{sp} \frac{\partial^3}{\partial z^3} g_0(x, x, z) dx = \frac{3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(\lambda)}{(\lambda - z)^4}. \quad (21)$$

Из леммы 3, леммы 2 и равенства (17) при $n = 3$ теперь следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dN(\lambda)}{(\lambda - z)^4} \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(\lambda)}{(\lambda - z)^4} \quad (22)$$

при $z = i\mu$, $\mu \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Если матрица $Q(x)$ удовлетворяет условиям 1–3 и условию (18) и, если существуют постоянные $M > 0$, $R > 0$, $3 < \gamma < 4$, такие, что при $|\lambda_1| > |\lambda_2| > R$

$$\frac{\psi(\lambda_1)}{\psi(\lambda_2)} < M \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^\gamma, \quad (23)$$

то $N(\lambda) \sim \frac{1}{2\pi} \psi(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \pm\infty$, т. е.

$$N_+(\lambda), N_-(\lambda) \sim \frac{1}{3\pi^2} \int \int \int_{\substack{p^2(x)+q^2(x) < \lambda^2}} |\lambda^2 - p^2(x) - q^2(x)|^{3/2} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Доказательство теоремы непосредственно следует из двусторонней тауберовой теоремы, доказанной Я. Т. Султанаевым (3). Условия, при которых $\psi(\lambda)$ удовлетворяет отношению (23), аналогичны тем, которые рассмотрены в замечании к работе (2).

Если N есть произвольное четное число, которое, очевидно, можно записать в виде $N = 2^q r$, где r — нечетно, то среди всех матриц порядка N , максимальное число таких, которые удовлетворяют условиям а), б), с) (см. введение) равно $2q+1$ (см. (4)). Рассмотрим самосопряженный оператор

$$L = \sum_{j=1}^3 a_j \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^{2q+1} a_j p_j(x) = L_1 + P(x) \quad (24)$$

в пространстве вектор-функций $L^2(R_3; C_N)$. Повторяя все рассуждения, проведенные выше для системы 4-х уравнений (системы Дирака), для системы (24) из N уравнений ($N = 2^q r$) совершенно аналогично получаем теорему о асимптотике дискретного спектра оператора L .

Теорема 4. Если потенциал $P(x)$ удовлетворяет условиям

$$1) \quad \| |P(\xi) - P(x)| P^{-a}(\xi) \| \leq A |x - \xi|, \quad \text{при } |x - \xi| \leq 1, A > 0, 0 < a < 2$$

$$2) \quad \| P(\xi) \| \leq B \| P(x) \|, \quad \text{при } |x - \xi| \leq 1, B > 0$$

$$3) \quad \| P(x) \| \leq K \exp \left\{ c_0 |x - \xi| \sqrt{\sum_{j=1}^{2q+1} p_j^2(\xi)} \right\}, \quad \text{при } |x - \xi| > 1, K > 0, \\ 0 < c_0 < 1$$

$$4) \quad c|x|^a < \| P(x) \|^2 < C|x|^a, \quad x > 6, 0 < c < C,$$

и функция

$$\psi(\lambda) = \frac{N}{12\pi^2} \int \int \int_{\substack{\sum_{j=1}^{2q+1} p_j^2(x) < \lambda^2}} \left\{ \lambda^2 - \sum_{j=1}^{2q+1} p_j^2(x) \right\}^{3/2} dx_1 dx_2 dx_3, \quad \lambda > 0, \psi(-\lambda) = -\psi(\lambda)$$

удовлетворяет условиям (23) теоремы (3.1), то имеет место асимптотическая формула

$$N(\lambda) \sim \psi(\lambda)$$

при $\lambda \rightarrow \pm \infty$.

В заключение автор выражает глубокую признательность А. Г. Костюченко за обсуждения и помощь в работе. Автор признателен также И. С. Саргсяну.

Ереванский государственный университет

Մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների սխտեմի
սեփական արժեքների բլի ասիմպտոտիկ բաշխումը

Դիտարկվում է ընդհանուր դեպքում դիֆերենցիալ ինքնահամարում օպերատոր

$$L = \sum_{j=1}^3 x_j \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + P(x), \quad P(x) = \sum_{j=1}^{2q+1} p_j(x) x_j$$

$L_2(R_3, C_N)$ տարածությունում, որտեղ $x_j \in N \times N$ մասրիցաներ են ($j = 1, 2, \dots, 2q+1$, երբ $N = 2^q r$, r — կենտ թիվ է), որոնք բավարարում են
a), b), c) պայմաններին և պահանջվում է՝

Թեև $P(x)$ բավարարում է 1—4 պայմաններին, ապա L օպերատորի սպեկտրը դիսկրետ է և $N(\lambda)$ բավարարում է ասիմպտոտիկ հավասարման, երբ $\lambda \rightarrow \pm \infty$

$$N(\lambda) \sim \frac{N}{12\pi^2} \int \int \int_{\sum_{j=1}^{2q+1} p_j^2(x) < \lambda^2} \left\{ \lambda^2 - \sum_{j=1}^{2q+1} p_j^2(x) \right\}^{3/2} dx_1 dx_2 dx_3.$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Э. Ферми, Квантовая механика, М., 1968. ² Н. С. Сирсели, Известия АН СССР, сер. мат., 36(6), 1972. ³ Я. Т. Султанаев, Изв. ВУЗов, № 1 (140), 1974. ⁴ Stöckert Bernd., „Publs math“, №1—4, 41—55 (1970).