

УДК 624.131

Г. В. Тер-Петросян

Задача об определении границы затвердевания грунта при воздействии жесткого штампа

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 20/X 1975)

Рассматривается плоская задача об определении границы затвердевания грунта, когда к его поверхности через жесткий штамп приложена нагрузка. Общий подход к решению такого рода задач изложен в работе С. С. Григоряна ⁽¹⁾. Для случая равномерно распределенной нагрузки на периодической системе отрезков конкретное решение получено в работе ⁽²⁾.

Принимается, что деформации грунта под штампом подчиняются линейно-упругой модели, а за границей затвердения среда абсолютно жесткая.

Решение задачи сводится к минимизации функционала Э упругой энергии приращения напряжений и деформаций в материале ⁽³⁾.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_D \left(\delta \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + 2 \delta \sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \delta \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} \right) dx dz. \quad (1)$$

Здесь $\delta \sigma_{xx}$, $\delta \sigma_{xz}$, $\delta \sigma_{zz}$ — приращения напряжений,

$\delta \varepsilon_{xx}$, $\delta \varepsilon_{xz}$, $\delta \varepsilon_{zz}$ — приращения деформаций,

D — область, где среда описывается упругой моделью.

Решение задачи осуществляется методом локальных вариаций ⁽⁴⁾.

Задача решается в перемещениях, т. е. разыскиваются функции перемещения $u(x, z)$, $w(x, z)$, которые на границах упругой области удовлетворяют следующим граничным условиям:

на поверхности полупространства $z = h_*$

$$w = -S \text{ при } |x| \leq a \quad (2)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \text{ при } |x| > a$$

$$\sigma_{xz} = 0$$

на поверхности раздела упругой и затвердевшей областей $z = \Gamma(x)$

$$u = w = 0. \quad (3)$$

Здесь u, w — соответственно перемещения по направлениям x и z , S — осадка штампа.

Поставленная задача существенно нелинейная, так как граница затвердевания, на которой ставятся граничные условия, неизвестна и определяется в ходе решения задачи.

Рассматриваемую задачу можно решать только численно с использованием современных ЭВМ. Последовательность действий при этом такая. Расчет ведется ступенями по величине внешнего воздействия (осадки S). На каждой ступени определяются поля напряжений и смещений в упругой области и определяется новое положение границы затвердевшей области по формуле

$$\delta z = - \frac{(\delta \sigma)_\Gamma}{\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)_\Gamma}, \quad (4)$$

где σ — среднее давление, т. е. $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, δz — перемещение границы затвердевания по направлению z , $(\delta \sigma)_\Gamma$ — изменение напряжения σ на границе Γ , соответствующее данному малому приращению осадки штампа. Для удобства численного решения задачи координаты, смещения и напряжения представим в безразмерном виде

$$X = \frac{x}{h_0}, \quad Z = \frac{z}{h_0}, \quad U = \frac{u \cdot E}{\sigma_0 \cdot h_0}, \quad W = \frac{w \cdot E}{\sigma_0 \cdot h_0},$$

$$\varepsilon_{XX} = \frac{E \varepsilon_{xx}}{\sigma_0}, \quad \varepsilon_{XZ} = \frac{E \varepsilon_{xz}}{\sigma_0}, \quad \varepsilon_{ZZ} = \frac{E \varepsilon_{zz}}{\sigma_0} \quad (5)$$

$$\Sigma_{XX} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_0}, \quad \Sigma_{XZ} = \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_0}, \quad \Sigma_{ZZ} = \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_0},$$

где $h_0 = 3 \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{\sigma_0}{\gamma} \quad (6)$

начальная глубина поверхности затвердевания от собственного веса грунта, σ_0 — критическое значение сжимающего всестороннего давления σ , E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала.

Приращения перемещений обозначим

$$\delta U = \varphi, \quad \delta W = \psi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \varphi_X, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial Z} = \varphi_Z,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \psi_X, \quad \frac{\partial \psi}{\partial Z} = \psi_Z.$$

Приращения напряжений через приращения деформаций выражаются формулами

$$\delta \Sigma_{xx} = a \varphi_x + b \psi_z, \quad \delta \Sigma_{zz} = b \varphi_x + a \psi_z, \quad \delta \Sigma_{xz} = \frac{c}{2} (\varphi_z + \psi_x), \quad (7)$$

а функционал (1) приводится к виду

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \int_D \left[a(\varphi_x^2 + \psi_z^2) + 2b\varphi_x\psi_z + \frac{1}{2} c(\varphi_z + \psi_x)^2 \right] dX dZ, \quad (8)$$

где

$$a = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad b = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad c = \frac{1}{1+\nu}.$$

Область D разобьем на равные прямоугольники параллельными прямыми $X_j = j\Delta X$, $Z_j = j\Delta Z$. Здесь ΔX , ΔZ достаточно малые числа.

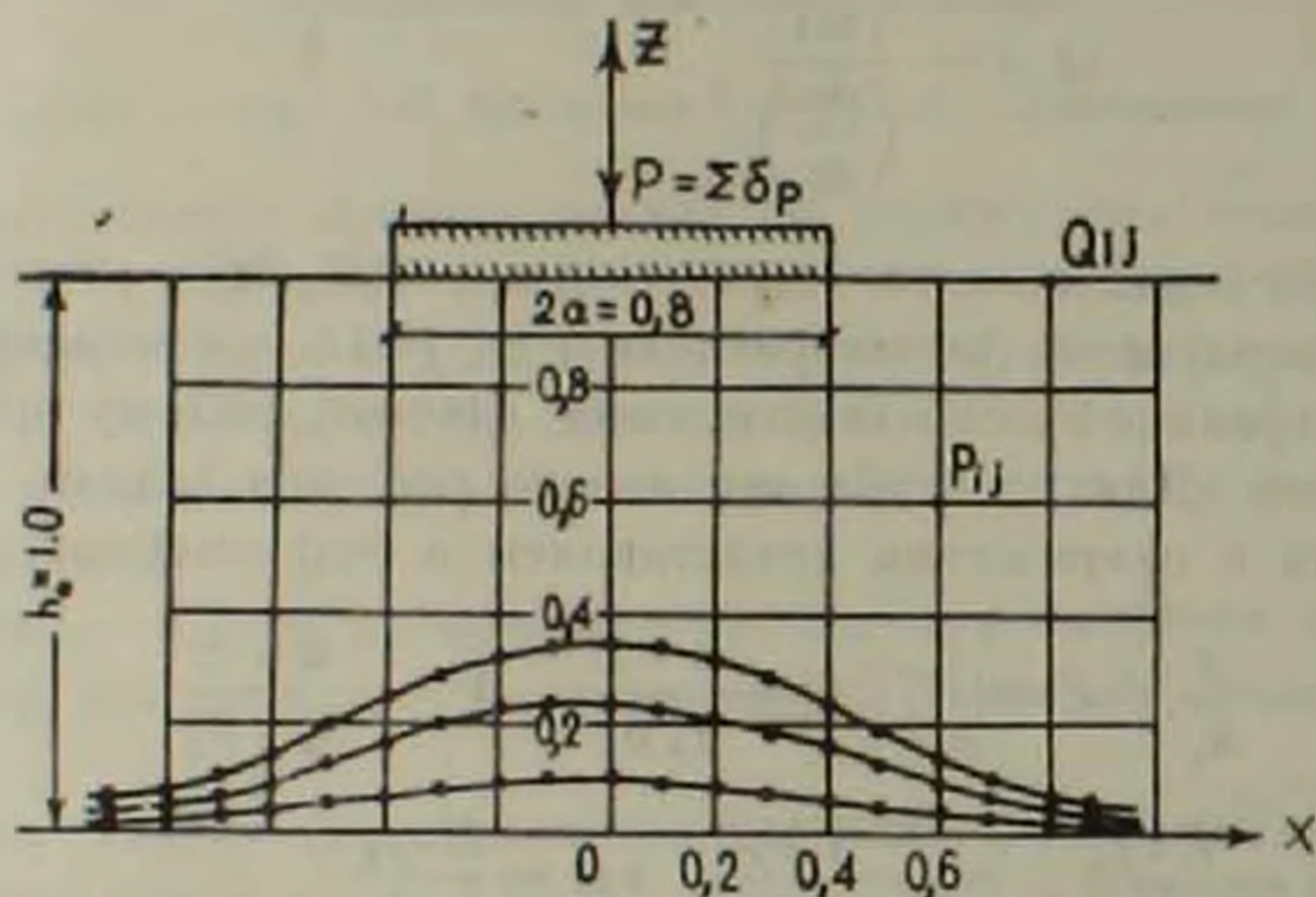


Рис. 1. Зависимость положения границы затвердевания от осадки штампа

Точка P_{ij} считается внутренней, если она вместе с четырьмя ячейками, вершиной которых она является, лежит внутри области D . Остальные точки будут граничными (обозначим Q_{ij}). Для численной реализации поставленной задачи функционал (8) приближенно заменим суммой

$$\mathfrak{A} = \sum \mathfrak{A}_{ij}, \quad (9)$$

где $\mathfrak{A}_{ij}$ — интеграл по ячейке с вершинами P_{ij} , $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$, $P_{i+1,j+1}$, который приближенно равен

$$\mathfrak{A}_{ij} = \frac{1}{2} \left[a[(\varphi_x)_{ij}^2 + (\psi_z)_{ij}^2] + 2b(\varphi_x)_{ij}(\psi_z)_{ij} + \frac{1}{2} c[(\varphi_z)_{ij} + (\psi_x)_{ij}]^2 \right] \Delta X \Delta Z. \quad (10)$$

Средние значения функций в ячейке определяются выражениями

$$(\varphi_x)_{ij} = \frac{\varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{2\Delta X}, \quad (\varphi_z)_{ij} = \frac{\varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i,j+1} - \varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{2\Delta Z},$$

$$(\varphi_x)_{ij} = \frac{\varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i-1,j+1} - \varphi_{i,j+1} - \varphi_{ij}}{2\Delta X}, \quad (\psi_z)_{ij} = \frac{\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i,j+1} - \psi_{i+1,j} - \psi_{ij}}{2\Delta Z}.$$

Значение функций $\varphi(X, Z)$ и $\psi(X, Z)$ в граничных точках считаем заданными при помощи присвоения в этих точках соответствующих значений из граничных условий (2), (3).

Изменение значения функции $\varphi(X, Z)$ или $\psi(X, Z)$ в одной внутренней точке области D приводит к изменению четырех слагаемых Δ_{ij} в сумме (9), соответствующих ячейкам, вершиной которой является данная точка. При изменении $\varphi(X, Z)$ и $\psi(X, Z)$ в граничной точке изменяются только два слагаемых в Δ .

Для процесса итерации большое значение имеет правильный выбор начальной величины шага варьирования и начальные значения функций $\varphi(X, Z)$ и $\psi(X, Z)$. Шаг варьирования выбирается из условия, чтобы в самой начальной точке итераций Δ_{ij} получила минимальное значение при данных значениях φ_{ij} , ψ_{ij} и малой осадке штампа δS .

По описанной выше схеме была решена задача о вдавлении жесткого штампа в грунтовое полупространство. Получены поля напряжений и смещений и определено положение границы затвердевания грунта при каждом малом приращении осадки штампа. Решение задачи в безразмерных величинах зависит от двух параметров a/h_* и ν . В расчетах было принято $a/h_* = 0,4$, $\nu = 0,28$.

Результаты вычислений приведены на рис. 1.

Сила давления на жесткий штамп, приходящейся на единицу длины штампа определяется по формуле

$$P = \int_{-a}^a \sigma_{zz} dX = 2\sigma_* h_* \int_0^{a/h_*} \Sigma_{zz}(\xi, 0) d\xi. \quad (11)$$

По полученным результатам построены распределения напряжения σ_{zz} на поверхности контакта штампа с грунтом для каждого

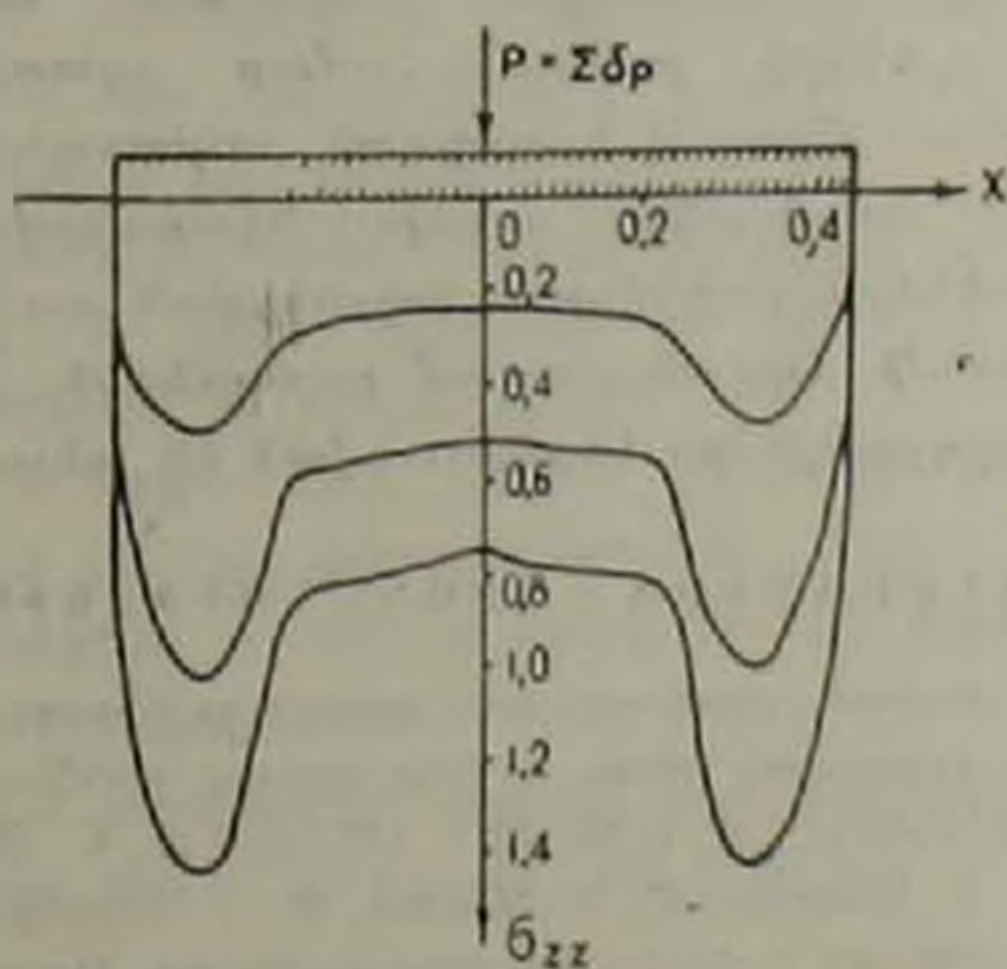


Рис. 2. Распределение напряжения σ_{zz} на поверхности контакта для каждого малого увеличена осадка штампа

малого увеличения осадки штампа (рис. 2). Характер этих распределений хорошо согласуется с имеющимися результатами экспериментов (например (3)). На рис. 3 показана зависимость осадки штампа

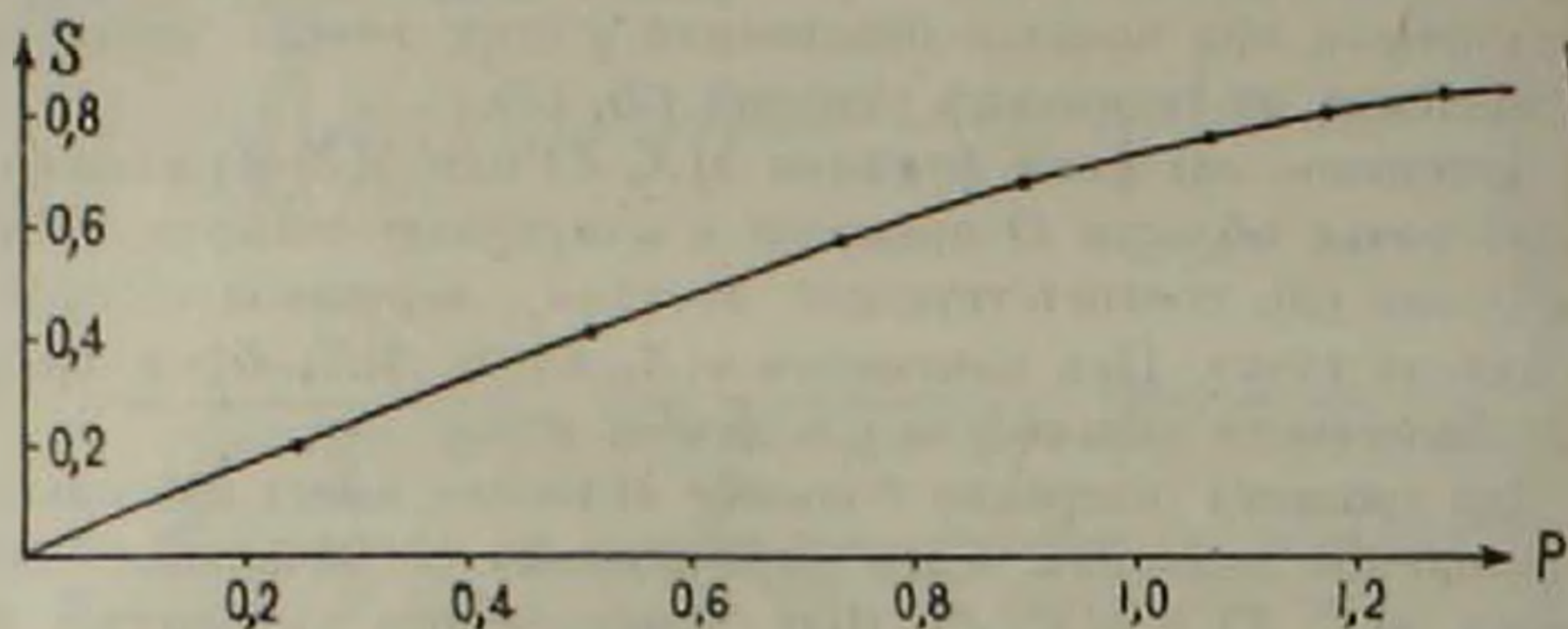


Рис. 3. Зависимость осадки штампа (S) от нагрузки (P)

на S от нагрузки P . Все приведенные результаты даны в безразмерных величинах.

Автор выражает благодарность С. С. Григоряну за постановку задачи.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Գ. Վ. ՏԵՐ-ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Կոշտ դրոշմի ազդեցության դեպում բնահողի կոշտացման սահմանագծի որոշման խնդիրը

Հողվածում դիտվում է բնահողի կոշտացման սահմանագծի որոշման հարթ խնդիրը, երբ նրա մակերևույթին դրված է կոշտ դրոշմ: Ընդունվում են, որ դրոշմի տակ միջավայրի դեֆորմացիաներն ենթարկվում են առանձգականության դժային տեսության օրենքներին, իսկ կոշտացման սահմանից հետո միջավայրը բացարձակ կոշտ է: Լուծումը հանգեցվում է լարումների և դեֆորմացիաների աճերի առաձգական էներգիայի ֆունկցիոնալի մինիմիզացիայի խնդրին: Խնդրի լուծման համար օգտագործվում է լոկալ վարիացիաների մեթոդը: Դրոշմի նստեցման յուրաքանչյուր փոքր արժեքի դեպքում ստացված են առաձգական մոդելով նկարագրվող գոտում լարումների, տեղափոխությունների դաշտերը և կոշտացման սահմանագծի դիրքերը: Ստացված է կոշտ դրոշմի հսկման մասում լարումների բաշխման օրինաչափությունը: Բոլոր արդյունքները ներկայացված են անչափողական տեսքով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. С. Григорян, К вопросу применимости теории упругости в строительной механике грунтов, Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., 1972.
- ² Г. В. Тер-Петросян, ДАН АрмССР, т. 60, № 5 (1975).
- ³ Л. С. Лейбензон, Курс теории упругости, М., 1947.
- ⁴ Н. В. Баничук, В. М. Петров, Ф. Л. Черноусько, Алгоритмы метода локальных вариаций для задач с частными производными, Институт проблем механики АН СССР, Брошюра № 4, 1971.
- ⁵ В. А. Зурнадж, В. В. Николаев, Механика грунтов, основания и фундаменты, М., 1967.