ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 5

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Г. Е. Багдасарян

К теории колебаний и устойчивости проводящих пластин в продольном магнитном поле

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 4/VII 1975)

На основе гипотезы магнитоупругости тонких тел, предложенной в работах [1,2], рассматриваются задачи колебаний и устойчивости проводящих пластин в магнитном поле, вектор напряженности которого параллелен к срединной плоскости пластинки. Определяются критическое значение напряженности магнитного поля и частоты колебания пластинки. Исследуется влияние проводимости материала пластинки и напряженности заданного магнитного поля на характеристики упругих колебаний.

1. Пусть упругая изотропная пластинка постоянной толщины $2h$ отнесена к декартовой системе координат x, y, z так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью xy.

Пластинка, изготовленная из материала с конечной постоянной электропроводностью σ, находится в заданном постоянном магнитном поле $\bar{B}_0(B_{01}, B_{02}, 0)$.

Принимаются следующие предположения:

1) гипотеза магнитоупругости тонких тел [1,2], согласно которой а) нормальный к срединной плоскости прямолинейный элемент пластинки после деформации остается прямолинейным, нормальным к деформированной срединной поверхности пластинки, и сохраняет свою длину; б) тангенциальные компоненты вектора напряженности возбуждаемого электрического поля и нормальная компонента вектора напряженности возбуждаемого магнитного поля по толщине пластинки остаются неизменными;

2) для внешней области (для всей области вне тела пластинки) считаются справедливыми уравнения Максвелла для вакуума;

3) влияния токов смещения на характеристики упругих колебаний пластинки пренебрегаются;

4) упругие перемещения и электромагнитные возмущения настолько малы, что можно пользоваться линейными уравнениями.

Согласно гипотезе магнитоупругости тонких тел ([1,2])

$$u_x = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = -z\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad u_z = w(x, y, t),$$

$$e_x = \varphi(x, y, t), \quad e_y = \psi(x, y, t), \quad h_z = f(x, y, t). \tag{1.1}$$

Здесь (u_x, u_y, u_z) — перемещения произвольной точки пластинки; φ, ψ — искомые тангенциальные компоненты индуцированного в пластинке электрического поля $\bar{e}(e_x, e_y, e_z)$; f — искомая нормальная компонента индуцированного в пластинке магнитного поля $\vec{h}(h_x, h_y, h_z)$; w — прогиб пластинки.

Используя гипотезы (1.1) так, как это делается в работах ([1-4]), получаем следующую систему дифференциальных уравнений относительно функций w, φ, ψ, f:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi + \frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\varphi - \frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h},$$

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{2\sigma h}{c}\left[B_{02}\left(\varphi - \frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) - B_{01}\left(\psi + \frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right] +$$

$$+\frac{2\sigma h^3}{3c}\left[B_{02}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - B_{01}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right] - \frac{2\sigma h^3}{3c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(B_{01}^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} -\right.$$

$$\left. - 2B_{01}B_{02}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + B_{02}^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \frac{2h(\mu-1)}{4\pi\mu^2}\left[B_{01}^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B_{01}B_{02}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} +\right.$$

$$\left. + B_{02}^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + \frac{\mu-1}{4\pi\mu}\left[B_{01}(h_x^+ - h_x^-) + B_{02}(h_y^+ - h_y^-)\right] - N_{11}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} -$$

$$- 2N_{12}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - N_{22}^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(h_y^+ - h_y^-) - \frac{\partial}{\partial y}(h_x^+ - h_x^-) = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[e_z^+ - e_z^- + \frac{2h}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(B_{01}\frac{\partial w}{\partial y} - B_{02}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right].$$

Здесь N_{ij}^0 — усилия, характеризующие начальное невозмущенное состояние пластинки, которые появляются вследствие намагничивания тела. Они будут определяться из следующих уравнений равновесия невозмущенного состояния и граничных условий на поверхности пластинки:

$$\frac{\partial \sigma^0_{ik}}{\partial x_k}=0, \qquad \vec{n}\,\hat{\sigma}^0=\vec{F}$$

$$N^0_{ij}=\int_{-h}^{h}\sigma^0_{ik}d\,x_3 \qquad (x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z) \qquad (1.3)$$

где

$$\vec{F}=\vec{n}(\hat{T}_1-\hat{T}_2), \quad T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left|\ H_{0i}B_{0k}-\frac{\delta_{ik}}{2}\vec{H}_0\vec{B}_0\ \right|, \quad \vec{H}_0=\mu^{-1}\vec{B}_0$$

$\vec{n}$—единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности пластинки, $\hat{\sigma}^0$—тензор напряжений начального состояния.

В уравнениях (1.2), как обычно, Δ—двумерный оператор Лапласа, $D=2Eh^3/3(1-\nu^2)$—цилиндрическая жесткость, E—модуль упругости, ν—коэффициент Пуассона, ρ—плотность, μ—магнитная проницаемость материала пластинки. Индексами плюс и минус отмечены значения соответствующих величин при $z=h$ и $z=-h$.

Для определения перемещений и электромагнитного поля в пластинке, как видно из (1.2), необходимо иметь значения компонент индуцированного электромагнитного поля h_x, h_y и e_z на поверхностях $z=\pm h$. Поэтому уравнения (1.2) необходимо рассматривать совместно с уравнениями Максвелла для внешней среды

$$\operatorname{rot}\vec{h}^{(e)}=0, \qquad \operatorname{div}\vec{h}^{(e)}=0. \qquad (1.4)$$

Здесь и в дальнейшем индекс «e» обозначает принадлежность к внешней области.

К системам (1.2)—(1.4) необходимо присоединить условия закрепления краев пластинки и условия для компонент электромагнитного поля на поверхности пластинки, а также условия затухания электромагнитных возмущений на бесконечности.

На основе приведенных уравнений и указанных выше условий рассмотрим конкретные задачи.

2. Пластинка—полоса шириной a находится в магнитном поле, вектор напряженности которого параллелен оси oy. Пластинка шарнирно оперта по двум длинным сторонам ($x=o$, $x=a$) и настолько длинная, что реализуется цилиндрическая форма колебаний $w=w(x,t)$. Магнитные и диэлектрические проницаемости материала пластинки считаются равными единице.

Из условий задачи следует, что $e_y=h_x=h_z=0$ во всем пространстве. В этом случае система уравнений (1.2) принимает вид:

$$4\pi\sigma\left(\varphi-\frac{H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{h_y^+-h_y^-}{2h}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(h_y^+-h_y^-)=\frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_z^+-e_z^--\frac{2hH_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right), \qquad (2.1)$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{2h\sigma}{c}H_{0x}\left(\varphi-\frac{H_{0x}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{2\sigma h^3}{3c}H_{0x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\varphi-\frac{H_{0x}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right).$$

Используя условия равенства нулю нормальной составляющей плотности тока на поверхностях $z=\pm h$, получаем [2]

$$e_z^{\pm}=\frac{hH_{0x}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}.$$

Тогда из первых двух уравнений системы (2.1) имеем

$$h_y^+-h_y^-=0,\qquad \varphi=\frac{H_{0x}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (2.1), замечаем, что все члены, учитывающие влияние магнитного поля, исчезают. Следовательно, в данной задаче магнитное поле, в пределах справедливости гипотез магнитно-упругости тонких тел, не оказывает влияния на характер упругих колебаний пластинки.

3. Рассмотрим магнитоупругие колебания пластинки-полосы шириной $2a$ $(-a<x<a,\ -\infty<y<\infty)$, помещенной в магнитном поле с вектором напряженности, параллельным оси ox. Предполагается, что пластинка, длинные стороны которой контактируют с неподвижной идеально проводящей диафрагмой, испытывает цилиндрический изгиб.

В этом случае $e_y=e_z=h_y=0$ во всем пространстве, а для $h_z^{(e)}$ в области $|z|\leqslant h$ имеем следующее выражение [5]:

$$h_z^{(e)}=\begin{cases}\mu f(x,t)-(\mu-1)B_{01}^{(e)}\dfrac{\partial w}{\partial x}, & |z|\leqslant h,\quad x\in[-a,a]\\[2mm] 0\quad, & |z|\leqslant h,\quad x\,\overline{\in}\,[-a,a]\end{cases} \tag{3.1}$$

Тогда из (1.2) и (3.1) для определения $h_z^{(e)}$ в полуплоскостях $|z|>h$ получим следующие внешние задачи Дирихле:

$$\Delta h_z^{(e)}=0$$

$$h_z^{(e)}\Big|_{z=\pm h}=\begin{cases}\mu f(x,t)-(\mu-1)B_{01}^{(e)}\dfrac{\partial w}{\partial x}, & x\in[-a,a]\\[2mm] 0 & x\,\overline{\in}\,[-a,a]\end{cases} \tag{3.2}$$

Решение задач (3.2) имеет вид

$$h_z^{(e)}=\pm\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{(z\pm h)[\mu f(\xi,t)-(\mu-1)B_{01}^{(e)}w_\xi(\xi,t)]}{(x-\xi)^2+(z\pm h)^2}\,d\xi. \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в уравнение $\operatorname{div}\vec{h}=0$ и переходя к пределу, когда $z\to\pm h$, найдем

$$h_x^+-h_x^-=\frac{2}{\pi}\int_{-a}^{a}\left[\mu f(\xi,t)-(\mu-1)B_{01}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial\xi}\right]\frac{d\xi}{x-\xi}, \tag{3.4}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Анализ магнитоупругих колебаний рассматриваемой пластинки после подстановки (3.4) в (1.2) сводится к исследованию следующей системы интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\mu}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\varphi+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\frac{1}{\pi h}\int_{-a}^{a}\left[\mu f(\xi,t)-\frac{\mu-1}{\mu}B_{01}\frac{\partial w}{\partial\xi}\right]\frac{d\xi}{x-\xi},$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{2\sigma h}{c}B_{01}\left(\varphi+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)- \tag{3.5}$$

$$-\frac{h(\mu-1)}{4\pi\mu^2}B_{01}^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\mu-1}{2\mu\pi^2}B_{01}\int_{-a}^{a}\left[\mu f-\frac{\mu-1}{\mu}B_{01}\frac{\partial w}{\partial\xi}\right]\frac{d\xi}{x-\xi}$$

с обычными условиями закрепления краев пластинки и условиями

$$\varphi=0\quad\text{при}\quad x=\pm a \tag{3.6}$$

В качестве первого примера рассмотрим случай бесконечной пластинки. Представим решение системы (3.5) в виде

$$\varphi=\varphi_0 e^{i(\omega t-kx)},\qquad f=f_0 e^{i(\omega t-kx)},\qquad w=w_0 e^{i(\omega t-kx)}, \tag{3.7}$$

где ω — частота колебаний, $k=\pi/\lambda$, λ — длина полуволны.

Подставляя (3.7) в (3.5) и учитывая, что областью интегрирования является $(-\infty,\ \infty)$, получим однородную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов φ_0, f_0, w_0. Приравнивая нулю определитель этой системы, приходим к характеристическому уравнению для определения частоты колебания

$$\sigma_0\Omega^3+\beta\Omega^2+\sigma_0(1+\mu_1\alpha\beta)\Omega+\beta(1-\mu_0)=0, \tag{3.8}$$

где

$$\sigma_0=\frac{4\pi\sigma}{\Omega_0},\qquad \beta=\frac{(\mu+kh)c^2}{\mu khV_0^2},\qquad \alpha=\frac{V_A^2}{c^2},\qquad V_0^2=\frac{\Omega_0^2}{k^2},$$

$$V_A^2=\frac{B_{01}^2}{4\pi\rho\mu^2},\qquad \Omega=\frac{i\omega}{\Omega_0},\qquad \Omega_0^2=\frac{Dk^4}{2\rho h},\qquad \mu_1=\frac{\mu(1+kh)}{\mu+kh} \tag{3.9}$$

$$\mu_0=\frac{\mu-1}{2\mu}\frac{V_A^2}{V_0^2}\ \mu_1=-\frac{1-\mu}{2}\frac{1+kh}{\mu+kh}\frac{V_A^2}{V_0^2}.$$

Согласно теореме Гурвица, из уравнения (3.8) условиями устойчивости пластинки будут

$$\mu_0+\mu_1\alpha\beta>0,\qquad 1-\mu_0>0. \tag{3.10}$$

Из (3.10) видно, что если $\mu < 1$ (материал пластинки является диамагнитом), то оба условия Гурвица выполняются при любом значении непряженности заданного магнитного поля. Следовательно, при $\mu < 1$ невозмущенное состояние пластинки всегда устойчиво по отношению к малым возмущениям. Если же $\mu > 1$ (в материале пластинки преобладающим является парамагнитный эффект), то первое условие (3.10) выполняется при любом значении B_{01}, а второе—при $\mu_0 < 1$. Из этого условия определяем критическое значение напряженности магнитного поля, которое, согласно (3.9), имеет величину

$$H_{0_*}^2 = \frac{8\pi}{-1+\mu}\,\frac{\mu+kh}{1+kh}\,\frac{E(kh^3)}{3(1-\nu^2)}. \tag{3.11}$$

Вопросы исследования зависимости частоты колебания от напряженности магнитного поля и от проводимости материала пластинки при $\mu < 1$, а также при $\mu > 1$ и $B_{01} < B_{0*}$ отложим до следующего примера, где будет рассмотрена аналогичная задача для конечной пластинки. Дело в том, что подобное исследование по уравнению (3.8) нецелесообразно, ввиду неизвестности волнового числа k. Отметим только, что для идеально проводящей пластинки ($\sigma\to\infty$) из (3.8) следует, что затухающее влияние магнитного поля исчезает ($\operatorname{Re}\Omega = 0$) и частота упругих колебаний пластинки определяется по формуле

$$\operatorname{Im}\Omega = \left[1+\frac{1+kh}{kh}\,\frac{V_A^2}{V_0^2}\right]^{1/2}. \tag{3.12}$$

Формула (3.12) подтверждает известный факт, что наличие продольного магнитного поля приводит к увеличению частоты упругих колебаний.

Переходим к определению частоты колебания и коэффициента затухания в случае пластинки-полосы ($-a \leqslant x \leqslant a$, $-\infty < y < \infty$) до потери устойчивости ($B_{01} < B_{0*}$). Имея в виду, что магнитная проницаемость μ обычно близка к единице, при рассмотрении указанных задач будем принимать $\mu = 1$. Тогда задача магнитоупругих колебаний пластинки, в силу (3.5) и (3.6) и несложных преобразований, сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi + \frac{H_{01}}{c}\,\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \frac{1}{\pi h}\int_{-a}^{a}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\,\frac{d\xi}{x-\xi},$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\sigma h}{c}H_{01}\left(\psi + \frac{H_{01}}{c}\,\frac{\partial w}{\partial t}\right) = 0 \tag{3.13}$$

с обычными условиями закрепления краев пластинки и условиями

$$\psi = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a. \tag{3.14}$$

Как показывает точное решение рассматриваемой задачи в случае бесконечной пластинки ((3.8) и (3.9) при $\mu = 1$), член $\partial^2\psi/\partial x^2$ в первом уравнении системы (3.13) имеет порядок h/a по сравнению с последним членом этого уравнения. Поэтому, оставаясь в пределах точности теории тонких пластинок, в дальнейшем им будем пренебрегать. Тогда из первого уравнения системы (3.13) путем применения формулы обращения интеграла типа Коши, с учетом условий (3.14), определяем функцию $\psi(\bar{x}, t)$.

Подставляя найденное $\psi(\bar{x}, t)$ во второе уравнение системы (3.13), задачу колебания рассматриваемой пластинки в продольном магнитном поле приводим к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{D}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\sigma h}{c^2} H_0^2 \frac{\partial w}{\partial t} +$$

$$+ \frac{4\sigma a h}{c^2} \int_{-1}^{\bar{x}} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\bar{\xi}^2}}{\bar{\xi}-\eta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{D}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{\xi}^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) d\bar{\xi} = 0$$

$$\bar{x} = xa, \quad \xi = \bar{\xi} a \tag{3.15}$$

с обычными краевыми условиями для $w(\bar{x}, t)$. Например, в случае защемленных кромок

$$w = \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{x} = \pm 1. \tag{3.16}$$

Представляя искомый прогиб пластинки в виде

$$w(\bar{x}, t) = w_0 e^{\omega t} (1 - \bar{x}^2)^2$$

удовлетворим граничным условиям (3.16), а из уравнения (3.15) методом Бубнова—Галеркина получим характеристическое уравнение

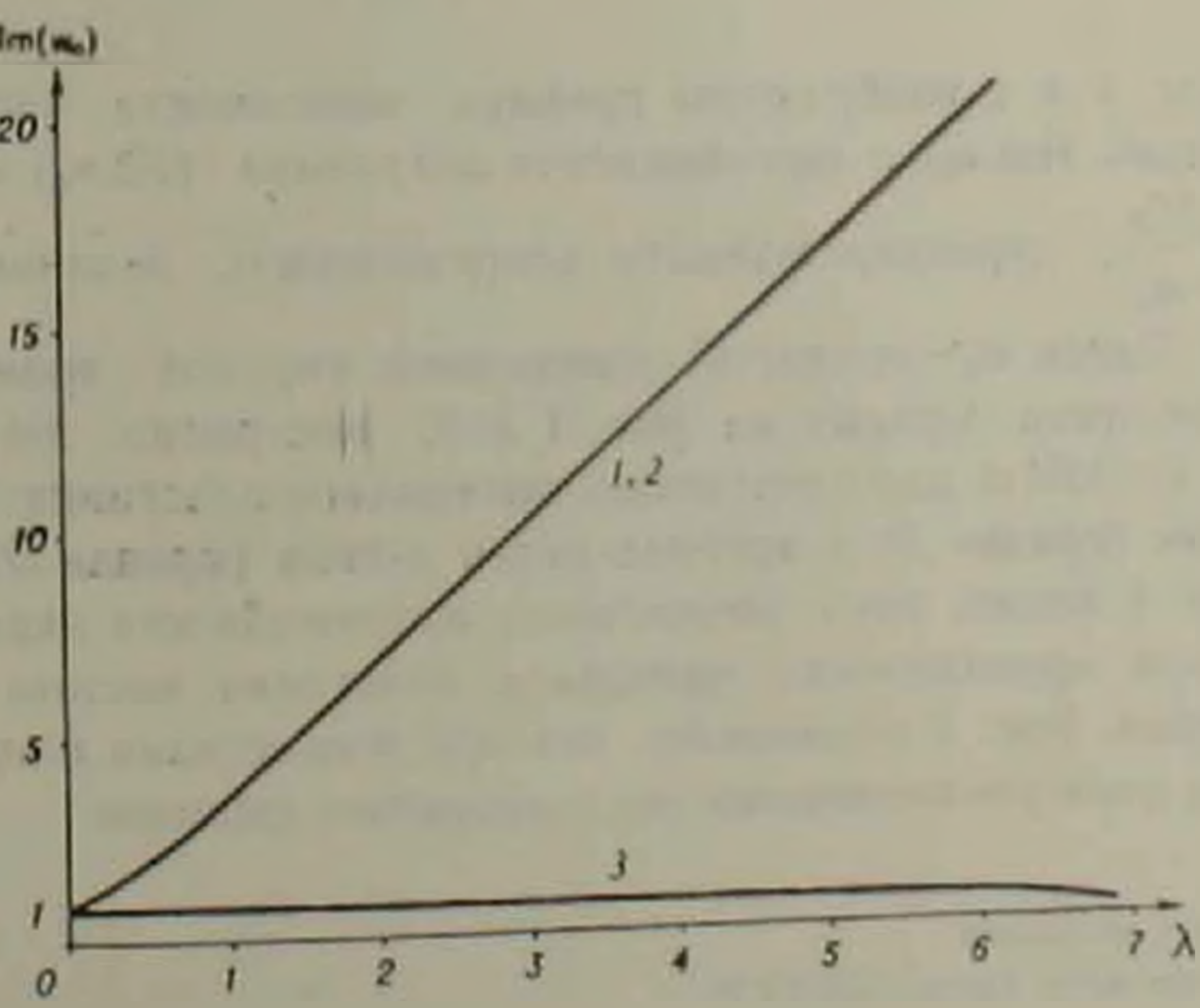

Рис. 1

$$\sigma_0\omega_0^3 + \beta\omega_0^2 + \sigma_1(1 + \alpha\beta)\omega_0 + \beta = 0, \tag{3.17}$$

где

$$\sigma_0 = \frac{4\pi\sigma}{\Omega_0}, \qquad \Omega_0^2 = \frac{63D}{4\rho h a^4}, \qquad \sigma_1 = 1{,}123\,\sigma_0, \qquad \alpha = \frac{1}{1{,}123}\,\frac{V_A}{c^2},$$

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\Omega_0}, \qquad V_A^2 = \frac{H_{01}^2}{4\pi\rho}, \qquad \beta = 1{,}22\,\frac{c^2}{a^2\Omega_0^2}\,\frac{a}{h}.$$

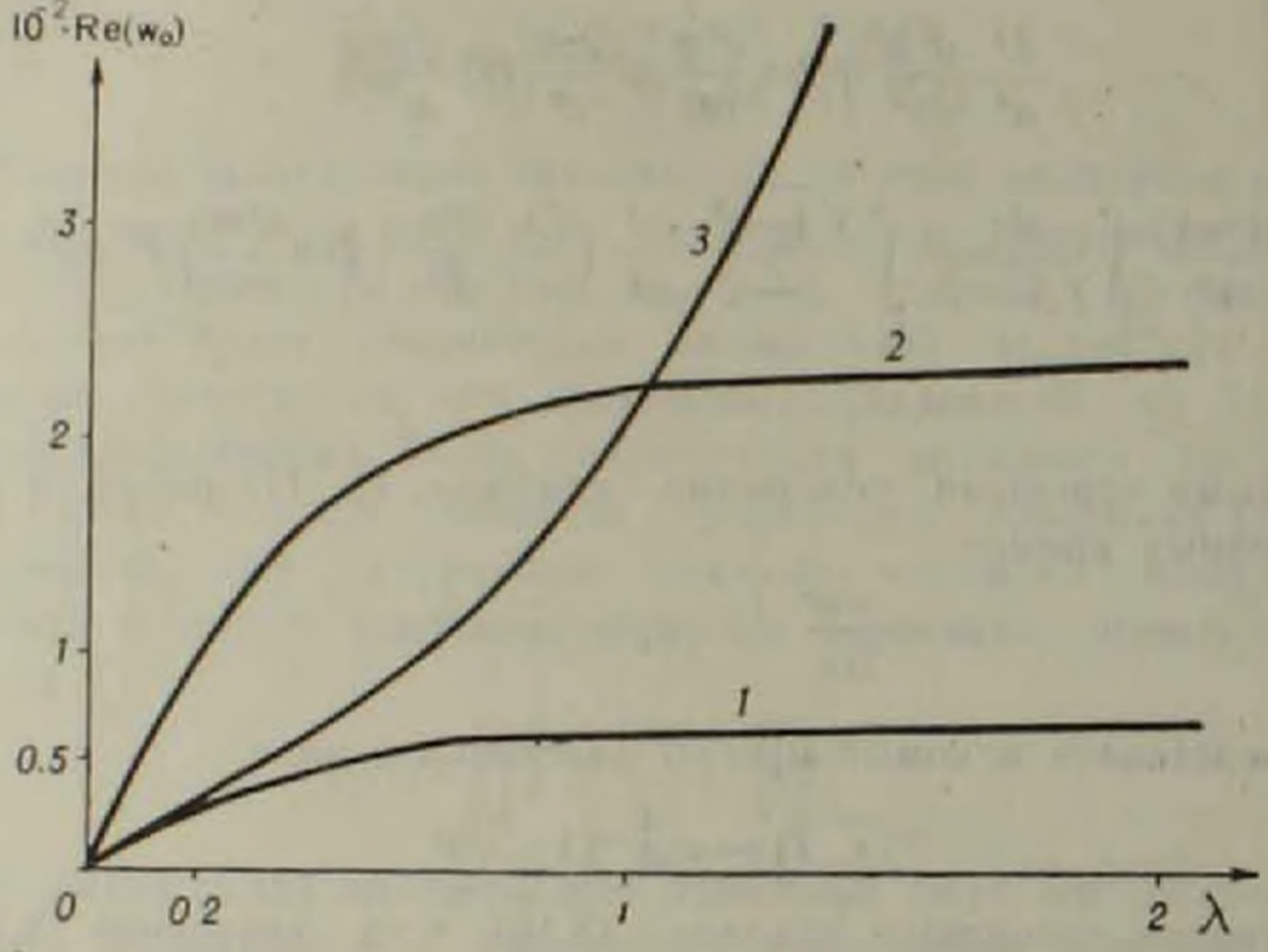

Рис. 2

На рис. 1 и 2 изображены графики зависимости частоты упругих колебаний ($\mathrm{Im}\,\omega_0$) и коэффициента затухания ($\mathrm{Re}\,\omega_0$) от параметра $\lambda = 10$[illegible]$\dfrac{V_A}{a_0}$, характеризующего напряженность заданного магнитного поля. Здесь a_0 — скорость поперечной упругой волны в случае медной пластинки. Кривые на рис. 1 и 2, построены по уравнению (3.17) при $h = 0{,}01\,a$ для следующих материалов пластинки: медь (кривая *1*), цинк (кривая *2*) и арсенид-галий *n*-типа (кривая *3*).

Из рис. 1 видно, что с увеличением напряженности заданного магнитного поля проводимости материала пластинки частота колебаний увеличивается. Рис. 2 показывает, что при возрастании напряженности магнитного поля увеличивается его затухающее действие.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Երկայնական մագնիսական դաշտում գտնվող հաղորդիչ սալի կայունության և տատանումների մասին

Բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության վարկածի հիման վրա դիտարկված է հաղորդիչ սալի տատանումների և կայունության խնդիրները երկայնական մագնիսական դաշտում։

Որոշված են մագնիսական դաշտի լարվածության կրիտիկական արժեքը և սալի տատանման հաճախականությունները։ Ուսումնասիրված է սալի նյութի էլեկտրահաղորդականության և տված մագնիսական դաշտի լարվածության ազդեցությունն առաձգական տատանումների հաճախականությունների և տատանումների մարման գործակցի վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян.* ПММ, т. 35, вып. 2, (1971). [2] *С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян.* ПММ, т. 37, вып. 1 (1973). [3] *В. В. Новожилов.* Основы нелинейной теории упругости, Гостехиздат, 1948. [4] *В. В. Болотин.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, М., 1961. [5] *Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян.* «Известия АН СССР», МТТ, № 2 1974.