

МЕХАНИКА

УДК 539.37

Ю. С. Ншлнян

Об одной задаче кручения составного полупространства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 11/V/1975)

В работе рассматривается задача о кручении составного полупространства с полусферической вставкой радиуса R из другого материала, когда оно скручивается поворотом упругой полусферы, сцепленной своей диаметральной плоскостью с полусферической вставкой. Решение задачи в конечном итоге сводится к определению неизвестных коэффициентов и одной функции интегрирования из системы смешанного типа. Показывается, что решение этой системы можно построить методом последовательных приближений. Кручению составных упругих тел со сферической поверхностью раздела материалов посвящены многие работы ⁽¹⁾ — ⁽⁸⁾.

Отметим еще, что к вопросу использования функции напряжений в задачах кручения тел вращения посвящены работы К. С. Чобаняна ⁽⁹⁾ и В. С. Саркисяна ⁽¹⁰⁾.

Пусть G_1 — модуль сдвига крутящей полусферы;

G_2 — полупространства с углублением;

G_3 — полусферической вставки.

Задача решается в сферической координатной системе (ρ, θ, φ) . Произведя замену координат ρ и θ зависимостями

$$t = \ln \frac{R}{\rho}, \quad \xi = \cos \theta \quad (1)$$

граничные условия задачи приведем к виду

$$\tau_{r\varphi}^{(1)}|_{t=0} = f(\xi) \quad (-1 < \xi < 0) \quad (2)$$

$$\tau_{r\varphi}^{(2)}|_{t=0} = 0 \quad (-\infty < t < 0) \quad (3)$$

Здесь $f(\xi)$ — суммируемая, кусочно-непрерывная функция, определяющая закон распределения касательных напряжений на поверхности крутящей полусферы. Поверхность полупространства полагается свободной от нагрузки. Условия контакта крутящей полусферы, полусферической вставки и полупространства даются соотношениями

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\varphi}^{(1)} &= \tau_{\xi\varphi}^{(2)} & U_{\varphi}^{(1)} &= U_{\varphi}^{(2)} \text{ при } \xi = 0, 0 < t < \infty \\ \tau_{t\varphi}^{(2)} &= \tau_{t\varphi}^{(3)} & U_{\varphi}^{(3)} &= U_{\varphi}^{(2)} \text{ при } t = 0, 0 < \xi < 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Задачу будем решать при помощи функции перемещения $\psi(t, \xi)$ (3). Через эту функцию, перемещения U_{φ} , напряжения $\tau_{\xi\varphi}$ и $\tau_{t\varphi}$ выражаются следующими соотношениями

$$\tau_{\xi\varphi} = G(1 - \xi^2) \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad \tau_{t\varphi} = G\sqrt{1 - \xi^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5)$$

$$U_{\varphi} = R e^{-\sqrt{1 - \xi^2}} \psi(t, \xi)$$

функцию перемещения ψ ищем в виде

$$\psi(t, \xi) = \begin{cases} \psi_1 & (-1 < \xi < 0, 0 < t < \infty) \\ \psi_2 & (0 < \xi < 1, -\infty < t < 0) \\ \psi_3 & (0 < \xi < 1, 0 < t < \infty) \end{cases} \quad (6)$$

Здесь, в соотношениях (2) — (4) и в дальнейшем величины, относящиеся к крутящей полусфере мы отмечаем индексом 1 — к полупространству — индексом 2 и к полусферической вставке — индексом 3. Функции

$\psi_i (i = 1, 2, 3)$ берем в виде (2.11)

$$\begin{aligned} \psi_i(t, \xi) &= \psi_i^0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1}^{(i)} e^{-2(k-1)t} P_{2k-1}'(\xi) + \int_0^{\infty} B_{\mu}^{(i)} P_{\frac{1}{2}+\mu}'(\xi^*) T_{\mu}(t) d\mu + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k-1}^{(i)} e^{(2k+1)t} P_{2k-1}'(\xi) \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (7)$$

где $T_{\mu}(t) = e^{\frac{3}{2}t} \left(\frac{3}{2} \sin \mu t - \mu \cos \mu t \right)$,

$$\psi_i^0 = A_i^0 \left[\frac{1}{1 + \xi^*} + \ln \frac{1}{1 + \xi^*} + t \right], \quad \xi^* = \xi \operatorname{sign} \xi, \quad \operatorname{sign} \xi = \begin{cases} -1, & \xi < 0 \\ 1, & \xi > 0 \end{cases} \quad (8)$$

$P_n(\xi)$ — полиномы Лежандра, $P_{-\frac{1}{2}+\mu}(\xi)$ — конические функции, $P_{\mu}'(\xi) = \frac{d}{d\xi} P_{\mu}(\xi)$, а $A_{2k-1}^{(i)}, D_{2k-1}^{(i)}$ и $B^{(i)}(\mu)$ — неопределенные коэффициенты и функции. Относительно этих неопределенных коэффициентов и функций полагаем, что

$$B^{(2)}(\mu) = A_{2k-1}^{(2)} = D_{2k-1}^{(1)} = D_{2k-1}^{(3)} = 0. \quad (9)$$

Для перемещений и напряжений, согласно (7) будем иметь:

$$\tau_{\xi\varphi}^{(i)} = G \sqrt{1 - \xi^2} \left\{ A_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} [-2(k-1) A_{2k-1}^{(i)} e^{-2(k-1)t} + \right.$$

$$+ (2k+1)D_{2k-1}^{(1)}e^{(2k+1)\mu}|P_{2k-1}'(\xi) + \int_0^{\pi} B^{(1)}(\mu)T_{\mu}(t)P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\xi^*)d\mu, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\xi}^{(1)} = G_1(1-\xi^2)| & - 2(2-l)A_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} |A_{2k-1}^{(1)} e^{-2(k-1)\mu} + \\ & + D_{2k-1}^{(1)} e^{(2k+1)\mu}| P_{2k-1}'(\xi) + \operatorname{sign} \xi \int_0^{\pi} B^{(1)}(\mu)P_{-\frac{1}{2}+i\mu}'(\xi^*) T_{\mu}(t)d\mu, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} U_{\varphi}^{(1)} = Re^{-i\sqrt{1-\xi^2}}|\psi_l^0 + \sum_{k=1}^{\infty} |A_{2k-1}^{(1)}e^{-2(k-1)\mu} + D_{2k-1}^{(1)}e^{(2k+1)\mu}|P_{2k-1}'(\xi) + \\ + \int_0^{\pi} B^{(1)}(\mu)P_{-\frac{1}{2}+i\mu}'(\xi^*) T_{\mu}(t)d\mu. \end{aligned} \quad (12)$$

Представим функцию $f(\xi)$ в виде разложения в ряд по функциям $P_{2k-1}'(\xi)$ (12)

$$f(\xi) = G_1\sqrt{1-\xi^2}|f_1 + \sum_{k=2}^{\infty} f_k P_{2k-1}'(\xi)|. \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_k = \frac{4k-1}{G_1 2k(2k-1)} \int_{-1}^0 (1-\xi^2)^{1/2} f(\xi) P_{2k-1}'(\xi) d\xi, \\ f_1 = \frac{3}{2G_1} \int_{-1}^0 (1-\xi^2)^{1/2} f(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (14)$$

Из условия (2), учитывая (13), имеем

$$A_{2k-1}^{(1)} = -\frac{f_k}{2(k-1)}, \quad A_0^{(1)} = f_1. \quad (15)$$

Условие (3) соотношениями (11) выполняется тождественно. Удовлетворяя первое из условий (4), имеем

$$G_1 B^{(1)}(\mu) = -G_2 B^{(3)}(\mu), \quad G_1 A_0^{(1)} = -G_2 \cdot A_0^{(3)}, \quad (16)$$

Второе из условий (4) дает:

$$A_1^{(3)} - A_1^{(1)} = \frac{4}{3} \left(A_0^{(1)} - A_0^{(3)} \right) + 3 \sum \frac{A_{2k+1}^{(1)} - A_{2k-1}^{(1)}}{2k+1} P_{2k-1}'(0) \quad (17)$$

$$\left(B^{(3)} - B^{(1)} \right) \left(\mu^2 + \frac{9}{4} \right) P_{-\frac{1}{2}+i\mu}'(0) = \frac{2\mu}{\pi} \frac{A_0^{(1)} - A_0^{(3)}}{\mu^2 + \frac{9}{4}} +$$

$$\frac{4\mu}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_{2k-1}^{(3)} - A_{2k-1}^{(1)}}{\mu^2 + \left(2k - \frac{1}{2} \right)^2} (k-1) P_{2k-1}'(0). \quad (18)$$

Следующее условие из (4) дает

$$\begin{aligned} -2G_2(k-1) A_{2k-1}^{(3)} &= G_2(2k+1) D_{2k-1}^{(2)}, \quad k=2, 3, \dots \\ 3G_2 D_1^{(2)} &= G_2 A_0^{(3)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Удовлетворяя последнее из условий (4), имеем

$$D_1^{(2)} - A_1^{(3)} = A_0^{(3)} \psi_1 + \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{\mu B^{(3)}(\mu) \cdot P_{-\frac{1}{2}+i\mu}^{(0)}(0)}{\mu^2 + \frac{9}{4}} d\mu, \quad (20)$$

$$D_{2k-1}^{(2)} - A_{2k-1}^{(3)} = A_0^{(3)} \psi_k + \frac{4k-1}{2k(2k-1)} P_{2k-1}^{(0)}(0) \cdot \int_0^\infty \frac{\mu B^{(3)}(\mu) P_{-\frac{1}{2}+i\mu}^{(0)}(0)}{\mu^2 + \frac{9}{4}} d\mu. \quad (21)$$

Здесь использованы разложения функций $P_{-\frac{1}{2}+i\mu}^{(0)}(\xi)$ и $\psi_l^0(\xi, 0)$ в ряды по функциям $P_{2k-1}(\xi)$. Причем

$$\psi_l^0(\xi, 0) = A_0^{(3)} \left[\frac{2}{3} \left(\ln 2 - \frac{1}{3} \right) + \sum_{k=0}^\infty \psi_k P_{2k-1}(\xi) \right], \quad (22)$$

$$\psi_k = \frac{(4k-1) P_{2k-1}^{(0)}(0)}{|2k(2k-1)|^2} \left[1 - \frac{1}{2(k-1)(2k+1)} - \frac{1}{2k(k-1)(2k-1)(2k+1)} \right]. \quad (23)$$

Введем новые неизвестные подстановкой

$$y_k = \frac{4k(k-1)(2k-1)}{(4k-1) P_{2k-1}^{(0)}(0)} A_{2k-1}^{(3)} \quad (k=2, 3, \dots) \quad (24)$$

$$x(\mu) = -\frac{\pi}{2} \mu P_{-\frac{1}{2}+i\mu}^{(0)}(0) B^{(3)}(\mu). \quad (25)$$

Легко заметить, что вновь введенные неизвестные определяются из соотношений

$$x(\mu) = h(\mu) + \sum_{k=2}^\infty H_k(\mu) y_k \quad (26)$$

$$y_n = \delta_n + \int_0^\infty g_n(s) x(s) ds \quad (n=2, 3).$$

Здесь обозначено

$$h(\mu) = -\frac{\mu^2}{(1+m_1)\left(\mu^2 + \frac{9}{4}\right)} \left\{ -A_0^{(3)} \frac{1+m_1}{\mu^2 + \frac{9}{4}} + \sum_{k=2}^\infty \frac{f_k \cdot P_{2k-1}^{(0)}(0)}{\mu^2 + \left(2k - \frac{1}{2}\right)^2} \right\} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\mu}^{(0)}(0)}{P_{-\frac{1}{2}+i\mu}^{(0)}(0)},$$

$$\delta_n = - \frac{4(n-1)n(2n+1)(2n-1)}{(4n-1)[2(n-1)(m_2+1)+3]} \cdot \frac{A_0^{(2)}}{P_{2n-1}^{(2)}(0)}.$$

$$H_k(\mu) = - \frac{1}{1+m_1} \frac{\mu^2}{\mu^2 + \frac{9}{4}} \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\mu}^{(2)}(0)}{P_{-\frac{1}{2}+i\mu}^{(2)}(0)} \cdot \frac{|P_{2k-1}^{(2)}(0)|^2}{\left(2k - \frac{1}{2}\right)^2 + \mu^2} \cdot \frac{4k-1}{2k(2k-1)}. \quad (27)$$

$$g_n(s) = \frac{2}{\pi} \frac{2(n-1)(2n+1)}{\left|2(n-1)(m_2+1)+3\right| \left|\mu^2 + \left(2n - \frac{1}{2}\right)^2\right|} \cdot m_l = \frac{G_2}{G_1} (l=1, 2)$$

Неизвестные коэффициенты $A_l^{(i)} (i=1, 2)$ выражаются через $x(\mu)$ и y_k с помощью равенств

$$A_1^{(1)} = A_1^{(2)} - \frac{4}{3} A_0^{(1)} \frac{1+m_1}{m_1} + 3 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f_k^{(1)} P_{2k-1}^{(1)}(0)}{2(k-1)(2k+1)} + \\ + 3 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|P_{2k-1}^{(2)}(0)|^2 (4k-1)}{(2k+1)(2k-1)(2k-2) \cdot 2k} \quad (28)$$

$$A_1^{(2)} = \frac{3\psi_1 - m_2}{m_2} A_0^{(1)} + \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x(\mu) d\mu}{\mu^2 + \frac{9}{4}}. \quad (29)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к определению неизвестных величин $x(\mu)$ и y_k из системы уравнений (26). Такие системы исследовались в работе (12) и, если для коэффициентов системы (26) имеют место оценки

$$\sum_{k=2}^{\infty} H_k(\mu) = 1 - \beta(\mu), \quad \int_0^{\infty} g_n(s) ds = 1 - \Phi(n). \quad (30)$$

II для свободных членов

$$\left| \frac{h(\mu)}{\beta(\mu)} \right| < K_1, \quad \left| \frac{\delta_n}{\Phi(n)} \right| < K_2.$$

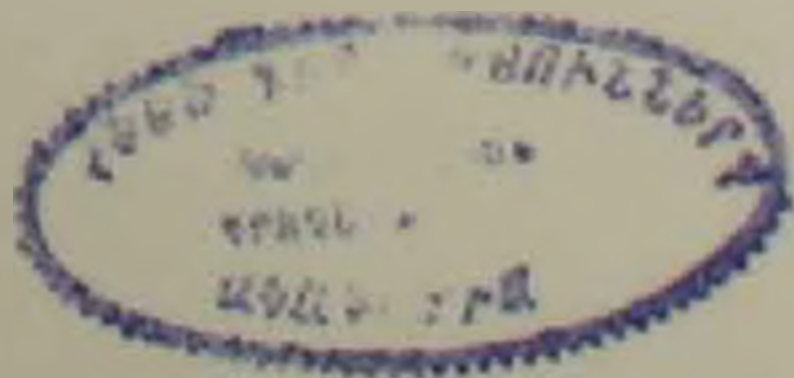
Где величины $\beta(\mu)$ и $\Phi(n)$ ограничены, положительны и меньше единицы при любых значениях μ и n , K_1 и K_2 ограниченные величины. Тогда из системы (26) величины $x(\mu)$ и y_k могут быть найдены методом последовательных приближений. Пользуясь выражениями (27) можно показать, что оценки (30) имеют место.

Армянский сельскохозяйственный институт

ՅՈՒ. Ս. ՆՇԱՆՑԱՆ

Բաղադրյալ կիսատարածության ոլորման մի խնդրի մասին

Աշխատանքում դիտվում է մի այլ նյութից պատրաստված R շառավիղով կիսաաֆերիկ ներդրակով կիսատարածության ոլորումը, երբ նա ոլորվում է



առանձնական կիսասֆերայով, որը ամրակցված է տրամագծային հարթու-
թյամբ կիսասֆերային ներդրակի հետ, Ի վերջո՝ խնդրի լուծումը բերվում է
անորոշ պորժակիցների և ինտեգրման ֆունկցիայի որոշմանը խստոր
սխառեմից: Ցույց է տրվում, որ սխառեմը կարելի է լուծել հաջորդական մոտ-
վորությունների եղանակով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Б. А. Абрамян, ДАН Арм. ССР, т. 51, № 1 (1970). ² Ю. С. Ишанян, ДАН Арм. ССР, т. 52, № 1 (1971). ³ Н. А. Арутюнян, Б. Л. Абрамян, Кручение упругих тел, Госиздат ф.-м. лит., М., 1963. ⁴ S. N. Das Ind. J. Theoret. Phys., V. 13, №1 (1966). ⁵ Чен, Прикладная механика, Труды Амер. общ. инст. мех. сер. Е, т. 33, №4, 253—263 (1966). ⁶ Хилл, Прикладная механика, Труды Амер. общ. инст. мех. сер. Е, № 33, №1 191—133. (1966). ⁷ Горн, Уилсон, Прикладная механика, Труды Амер. общества инст. мех. сер. Е, т. 34. 2. 63—70. (1967). ⁸ R. N. Chatterjee, Ind. J. Theoret. Phys., V. 13 №1(1966). ⁹ К. С. Чобанян, ДАН Арм. ССР, т. 27, №3 (1958). ¹⁰ В. С. Саркисян, ДАН Арм. ССР, т. 47, №4 (1968). ¹¹ А. А. Баблоян, Н. О. Гулкнян, Известия АН Арм. ССР, механика, т. 19, №5 (1966). ¹² Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций И. Л., М., 1952. ¹³ В. Т. Гринченко, Л. Ф. Улитко, Прикл. мех., т. 4, вып. 10, (1968).

