ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 5

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

Ю. Ф. Коробейник, Б. А. Саакян

К вопросу о представлении $\langle\rho_j\rangle$ —абсолютно-монотонных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 10/VII 1975)

§ 1. Бесконечно-дифференцируемая в промежутке $[0, 1)$ функция называется абсолютно-монотонной в этом промежутке, если $f^{(k)}(x)\geq 0$, $\forall k\geq 0$, $\forall x\in[0, 1)$. Согласно результату С. Н. Бернштейна ([1]) совокупность всех абсолютно-монотонных на $[0, 1)$ функций совпадает с множеством сужений на $[0, 1)$ всех аналитических в единичном круге функций с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами, то есть с функциями вида

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\ a_n\geq 0,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}\leq 1,\quad 0\leq x<1.$$

Понятие абсолютно-монотонной функции обобщалось в различных направлениях ([2–4]). В частности, в работе ([4]) введено довольно общее понятие $\langle\rho_j\rangle$ —абсолютно-монотонной функции и изучен вопрос о представлении такой функции. При этом существенно использовались операторы дробного интегрирования и дифференцирования, теория которых получила широкое развитие и применение в работах М. М. Джрбашяна и его учеников (см., например, монографию ([5])).

В настоящей заметке получены теоремы об общем виде $\langle\rho_j\rangle$ —абсолютно-монотонных функций в случае $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_j}=+\infty$; эти теоремы имеют такой же законченный характер, как и для обычных абсолютно-монотонных функций. В статье используются обозначения, определения и результаты работы ([4]).

§ 2. Лемма 1. *Пусть* $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ —*произвольная последовательность неотрицательных чисел, имеющих предел* λ_∞, *где* $0<\lambda_\infty\leq+\infty$. *Пусть, далее,* a_n —*неотрицательные числа,* $0<l\leq+\infty$. *Следующие два утверждения равносильны:*

1) *для любого* x *из промежутка* $[0, l)$ *сходится ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}; \qquad (1)$$

2) *для любого* $x \in [0, l)$ *сходится ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n x^{\lambda_n}. \qquad (2)$$

Доказательство. Если $\lambda_\infty < +\infty$, *то* $\forall n > N$, $\forall x \in [0, l)$

$$\frac{\lambda_\infty}{2} a_n x^{\lambda_n} \leqslant a_n \lambda_n x^{\lambda_n} < 2\lambda_\infty a_n x^{\lambda_n}.$$

Отсюда видно, что ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно при $x \in (0, l)$ (в точке $x=0$ оба ряда сходятся, так как $(0)^{\lambda_n} = 0$, $\forall n > N_1$).

Пусть теперь $\lambda_\infty = +\infty$. Так как $\lim\limits_{x \to +\infty} xq^x = 0$, если $q \in (0, 1)$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n q^{\lambda_n} = 0$, $\forall q \in (0, 1)$. Очевидно, что $a_n \lambda_n x^{\lambda_n} \geqslant a_n x^{\lambda_n}$, $\forall n \geqslant N_2$, и из сходимости ряда (2) в какой-нибудь точке $x \in [0, l)$ следует сходимость ряда (1) в той же точке.

Пусть теперь ряд (1) сходится в промежутке $[0, l)$ Возьмем любое $x_1 \in [0, l)$, а затем — произвольное $x_2 \in (x_1, l)$. Тогда $\forall n > N_3$

$$a_n \lambda_n x_1^{\lambda_n} = a_n x_2^{\lambda_n} \lambda_n \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\lambda_n} = a_n x_2^{\lambda_n} \lambda_n q^{\lambda_n} < a_n x_2^{\lambda_n}$$

Отсюда следует, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n x_1^{\lambda_n}$$

сходится, и лемма доказана.

Выясним теперь, при каких условиях на коэффициенты a_k ряд (1) сходится в промежутке $[0, l)$. Рассмотрим сначала случай, когда $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda_\infty < +\infty$. В этом случае легко заметить, что ряд (1) сходится в интервале $(0, l)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda_\infty}$, то есть, когда сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \qquad (3)$$

Пусть теперь $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$. Если $x \in (0, l)$ и ряд (1.1) сходится, то $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} |a_n x^{\lambda_n}|^{\frac{1}{\lambda_n}} = x \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} \leqslant 1$.

Поэтому для сходимости ряда (1) в $(0, l)$ необходимо, чтобы

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} \leqslant \frac{1}{l}. \qquad (4)$$

При некоторых дополнительных предположениях на λ_n это условие и достаточно. Допустим, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0. \tag{5}$$

Если выполняется условие (5), то с помощью логарифмического признака сходимости (см. например ([6]), упражнение 2615) получаем, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{\lambda_n}$ сходится в промежутке [0, 1).

Пусть коэффициенты $\{a_k\}$ удовлетворяют условию (4), а числа $\{\lambda_k\}$ — условию (5). Возьмем произвольное x_1 из $(0, l)$, а затем $x_2 \in (x_1, l)$. Тогда из (4) следует, что $a_n x_1^{\lambda_n} \leqslant \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\lambda_n}$ для всех $n \geqslant N_1$, и по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^{\lambda_n}$ сходится. Сформулируем полученный результат:

Лемма 2. *Пусть* $\lambda_n \geqslant 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_\infty$, $0 < \lambda_\infty \leqslant +\infty$. *Пусть, далее,* $0 < l < +\infty$, $a_n \geqslant 0$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ *Тогда для сходимости ряда* (1) *в промежутке* $[0, l)$

а) *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд* (3), если $\lambda_\infty < +\infty$;
б) *необходимо, чтобы выполнялось условие* (4), *если* $\lambda_\infty = +\infty$;
в) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* (4), *если числа* λ_n *удовлетворяют условию* (5).

§ 3. Положим $\rho_0 = 1$, $\rho_j \geqslant 1$ $(j \geqslant 1)$; $\lambda_0 = 0$,

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\rho_k}, \quad \lambda_\infty = \lim_{n\to\infty} \lambda_n; \quad 0 < l \leqslant +\infty.$$

Обозначим символом $D(\langle\rho_j\rangle, l)$ класс всех $\langle\rho_j\rangle$ — абсолютно-монотонных на $[0, l)$ функций. Комбинируя леммы 1 и 2 с теоремами 1 и 2 работы ([4]), получаем такие результаты:

Теорема 1. *Если* $\lambda_\infty = +\infty$, *то класс* $D(\langle\rho_j\rangle, l)$ *совпадает с множеством сумм всех сходящихся в промежутке* $[0, l)$ *рядов вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(1+\lambda_n)} x^{\lambda_n}, \quad a_n \geqslant 0 \tag{6}$$

При этом, если $f(x)$ — *сумма ряда* (6), *то* $a_n = \bar{A}_n f(0)$, $n = 0, 1, \ldots$

Теорема 2. *Пусть числа* λ_n *удовлетворяют условию* (5). *Тогда класс* $D(\langle\rho_j\rangle, l)$ *совпадает с совокупностью сумм всех рядов вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1+\lambda_k)} x^{\lambda_k}, \; a_k \geqslant 0, \; \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{|a_k|^{\frac{1}{\lambda_k}}}{\lambda_k} \leqslant \frac{1}{le}, \; 0 \leqslant x < l. \tag{7}$$

Заметим, что в случае $\lambda_n = n$ теорема II совпадает с результатом С. Н. Бернштейна, о котором говорилось выше (см. § 1).

В теоремах I—II последовательность $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет условиям

$$\lambda_0=0,\ 0<\lambda_{k+1}-\lambda_k\leqslant 1,\quad \lim_{k\to\infty}\lambda_k=+\infty. \tag{8}$$

Пусть теперь $\{\mu_k\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям

$$\mu_0=0,\ \mu_{k+1}>\mu_k,\ \ k=0,\ 1,\ \ldots;\ \lim_{k\to\infty}\mu_k=+\infty. \tag{9}$$

Дополним каким-нибудь способом последовательность $\{\mu_k\}$ до последовательности $\{\lambda_s\}$ так, чтобы выполнялись условия (8) (то есть, „сгустим“ последовательность $\{\mu_k\}$). Положим $\rho_n=\dfrac{1}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}$, $n=1, 2, \ldots$, и обозначим символом $D(<\rho_j>, l, \mu_n)$ подкласс $D(<\rho_j>, l)$, состоящий из всех тех функций $f(z)$, для которых $\bar{A}_n f(0)=0$, если $\lambda_n\,\bar{\in}\,\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Из теорем I—II легко получаем такой результат:

Теорема III. *Пусть числа* $\{\mu_k\}$ *удовлетворяют условиям* (9) и $\{\lambda_m\}$ — *произвольное пополнение* $\{\mu_k\}$ *до последовательности, удовлетворяющей условиям* (8). *Тогда:*

а) *класс* $D(<\rho_j>, l;\ \mu_n)$ *совпадает с множеством сумм всех сходящихся на* $[0, l)$ *рядов вида* (6), *в которых* $a_n=0$, *если* $\lambda_n\,\bar{\in}\,\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$;

б) *если числа* λ_n *удовлетворяют условию* (5), *то класс* $D(<\rho_j>, l;\ \mu_n)$ *совпадает с совокупностью всех рядов вида* (7), *в которых* $a_n=0$, *когда* $\lambda_n\,\bar{\in}\,\{\mu_m\}_{m=0}^{\infty}$.

Пункт а) теоремы III является усилением ранее доказанных теорем I. 4 и I. 5 из диссертации ([7]).

Ростовский государственный университет
Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Ֆ. ԿՈՐՈԲԵՅՆԻԿ, Ռ. Հ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

$<\rho_j>$ —բացարձակ մոնոտոն ֆունկցիաների ներկայացման հարցի մասին

Համաձայն Ս. Ն. Բեռնշտեյնի հայտնի թեորեմի $[0, 1)$ *միջակայքում բացարձակ մոնոտոն ֆունկցիաների բազմությունը համընկնում է ոչ բացասական թեյլորյան գործակիցներ ունեցող* $|z|<1$ *միավոր շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների* $\{f(z),\ z\in[0,\ 1)\}$ *բազմության հետ։*

Այս հոդվածում ստացված է հիշյալ թեորեմի ճիշտ անալոգը $<\rho_j>$ *բացարձակ մոնոտոն ֆունկցիաների համար այն դեպքում, երբ* $\sum_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{\rho_j}=+\infty.$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Н. Бернштейн.* Абсолютно-монотонные функции. Собрание сочинений, т. 35, 370—425, 1952. [2] *S. Karlin and W. Studden*, Tchebycheff System with application in analyses and statics, Interscience, New York, 1966. [3] *М. М. Джрбашян, Б. А. Саакян*, «Известия АН СССР», серия матем., т. 39, № 1, 69—122, (1975). [4] *Б. А. Саакян*, «Известия АН АрмССР», сер. матем. 9, № 4, 285—307 (1974). [5] *М. М. Джрбашян.* Интегральное преобразование и представления функций в комплексной области, Изд «Наука», М., 1966. [6] *Б. П. Демидович*, Сборник задач и упражнений по математическому анализу, ГНФМЛ М., 1958. [7] *Б. А. Саакян*, Разложения типа Тейлора—Маклорена некоторых классов обобщенно абсолютно-монотонных функций, канд. дисс., Ереван, ЕГУ, 1975.