

УДК 621.37/39

РАДИОФИЗИКА

К. А. Барсуков, Г. А. Григорян

**О распространении электромагнитных волн в волноводе с
 неравномерно движущейся границей**

(Представлено академиком АН Армянской ССР Э. Г. Мирзабекяном 12/VI 1975)

Исследования волноводов с подвижной границей оказываются существенными для решения многих вопросов радиофизики, таких, как влияние вибраций стенок на характеристики волновода, перестройка полосы пропускания, преобразования частот и т. п. Известные к настоящему времени точные решения этой задачи относятся к плоскому волноводу, образованному двумя идеально-проводящими плоскостями, для волны типа H_{no} (1, 2). В первой из этих работ рассматривается линейный закон движения границы $x = a + vt$, во второй — параболический: $x = \sqrt{a^2 + 2avt}$.

Ниже предлагается исследование прямоугольного волновода для любого типа поляризации волны при параболическом законе движения его стенки.

Пусть $x=0$, $y = \pm \frac{b}{2}$ уравнения трех стенок прямоугольного

волновода без заполнения ($\epsilon = \mu = 1$), а четвертая в момент времени $t=0$ начинает двигаться по закону

$$x = x(\tau) = \sqrt{a^2 + 2a\beta\tau}, \quad (1)$$

где a — начальный размер волновода, $\tau = ct$, $v = \beta c$ есть начальная скорость движения стенки. С точностью до членов порядка β^2 (1) моделирует равнозамедленное движение с ускорением $g = \beta^2 c^2/a$, а в пренебрежении членами с β^2 — равномерное со скоростью v . Граничные условия, в предположении идеальной проводимости стенок волновода, имеют вид:

$$E_x = E_z = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm \frac{b}{2},$$

$$E_z = E_y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad (2)$$

$$E_z + \bar{\beta} H_y = 0, \quad E_y - \bar{\beta} H_z = 0 \quad \text{при} \quad x = \bar{x}(\tau),$$

где $\bar{\beta} = \frac{d\bar{x}(\tau)}{d\tau}$. Поля в волноводе выразим через две скалярные функ-

ции $A_n^{(1)}(x, \tau)$ и $A_n^{(2)}(x, \tau)$ соотношениями:

$$\begin{aligned}
 E_x &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)}(x, \tau) \sin \frac{\pi n}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right) e^{ihz} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{xn}, \\
 \vec{E}_\perp &= \sum_{n=0}^{\infty} \vec{E}_{n\perp} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n^{-2} \left\{ \nabla \frac{\partial E_{xn}}{\partial x} - \text{rot} \frac{\partial H_{xn}}{\partial \tau} \vec{e}_x \right\}, \\
 H_x &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)}(x, \tau) \cos \frac{\pi n}{b} \left(y + \frac{b}{2} \right) e^{ihz} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{xn}, \\
 \vec{H}_\perp &= \sum_{n=0}^{\infty} \vec{H}_{n\perp} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n^{-2} \left\{ \nabla \frac{\partial H_{xn}}{\partial x} + \text{rot} \frac{\partial E_{xn}}{\partial \tau} \vec{e}_x \right\},
 \end{aligned} \tag{3}$$

где h — постоянная распространения в волноводе, $\Delta_n = \sqrt{h^2 + (\pi n/b)^2}$. \vec{E}_\perp и \vec{H}_\perp — нормальные к оси Ox составляющие полей, \vec{e}_x — орт оси Ox .

Неизвестные функции $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ удовлетворяют обычным волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 A_n^{(1,2)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_n^{(1,2)}}{\partial \tau^2} - \Delta_n^2 A_n^{(1,2)} = 0, \tag{4}$$

Такое представление полей обеспечивает выполнение граничных условий при $y=0$ и $y=b$. Заметим, что (3) описывают „гибридные“ волны в волноводе, состоящие из ТМ и ТЕ мод, так как только такой тип решения позволяет в общем случае удовлетворить первому из условий (2).

Подстановка полей из (3) в граничные условия (2) приводит, как это нетрудно видеть, к следующим простым соотношениям для функций $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$:

$$\frac{\partial A_n^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial A_n^{(2)}}{\partial \tau} = 0, \quad \text{при } x=0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial A_n^{(1)}}{\partial x} + \beta \frac{\partial A_n^{(1)}}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial A_n^{(2)}}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial A_n^{(2)}}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \bar{x}(\tau). \tag{6}$$

В уравнении (4) введем новые переменные, предложенные в работе (2):

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{1}{2} \left[\varphi(\tau + x) - \varphi(\tau - x) \right], \\
 \xi &= \frac{1}{2} \left[\varphi(\tau + x) + \varphi(\tau - x) \right],
 \end{aligned} \tag{7}$$

где $\varphi(\cdot) = \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{a\beta}} - \frac{1}{\beta}$.

Из (7) следует, что граница $x=0$ переходит в $\eta=0$, а $x=\bar{x}(\tau)$ в $\eta=1$. Проведя замену переменных (7) в (4) получим:

$$\frac{\partial^2 A_n^{(1,2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 A_n^{(1,2)}}{\partial \eta^2} + \Delta_n^2 a^2 \left[(1 + \beta \xi)^2 - \beta^2 \eta^2 \right] A_n^{(1,2)} = 0. \quad (8)$$

Можно показать, что граничные условия с помощью замены (7) переходят в следующие

$$\frac{\partial A_n^{(1)}}{\partial \eta} = 0, \quad A_n^{(2)} = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \text{ и } \eta = 1. \quad (9)$$

Следовательно, в переменных ξ, η задача нахождения полей в полноволде сведена к решению уравнений (8) с граничными условиями (9).

Очевидно, (8) допускает разделение переменных. Будем искать $A_n^{(1,2)}$ в виде:

$$A_n^{(1,2)}(\xi, \eta) = U_n^{(1,2)}(\xi) V_n^{(1,2)}(\eta). \quad (10)$$

Если теперь подставить $A_n^{(1,2)}$ из (10) в (8), то получим

$$U_n^{(1,2)''} + [a^2 \Delta_n^2 (1 + \beta \xi)^2 + \mu^2] U_n^{(1,2)} = 0, \quad V_n^{(1,2)''} + [(\alpha \Delta_n \beta)^2 \eta^2 + \mu^2] V_n^{(1,2)} = 0, \quad (11)$$

где μ^2 — постоянная разделения, причем граничные условия (9) принимают вид

$$V_n^{(1)}(0) = 0, \quad V_n^{(1)}(1) = 0, \\ V_n^{(2)}(0) = 0, \quad V_n^{(2)}(1) = 0. \quad (12)$$

Решениями уравнений (11) являются соответственно четная ${}_e U_{\cdot n}(\cdot)$ и нечетная ${}_o U_{\cdot n}(\cdot)$ функции параболического цилиндра, подробная теория которых содержится в работе (2), где $x_n = \mu^2 / \Delta_n a \beta$ и $\cdot = \sqrt{\Delta_n a \beta} \eta$ либо $\cdot = \sqrt{\Delta_n a \beta} \left(\xi + \frac{1}{\beta} \right)$. С учетом граничных условий (12) при $\eta=0$ и (10) решения (8) могут быть представлены следующим образом:

$$A_n^{(1,2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{{}_e U_{\cdot nm}(\sqrt{\Delta_n a \beta} \eta)}{{}_o U_{\cdot nm}(\sqrt{\Delta_n a \beta} \eta)} \right| \left\{ \alpha_{nm} {}_o U_{\cdot nm} \left[\sqrt{\Delta_n a \beta} \left(\xi + \frac{1}{\beta} \right) \right] + \right. \\ \left. + \beta_{nm} {}_e U_{\cdot nm} \left[\sqrt{\Delta_n a \beta} \left(\xi + \frac{1}{\beta} \right) \right] \right\}, \quad (13)$$

где $x_{nm} = \mu^2 / \Delta_n a \beta$, α_{nm} и β_{nm} — коэффициенты, определяемые из условий возбуждения данного типа колебаний, и верхняя строка относится к $A_n^{(1)}$, а нижняя — к $A_n^{(2)}$.

В работе (2) было исследовано распространение волны H_{n0} , которое получается из (13) при нечетной функции параболического цилиндра и значении $n = 0$. Здесь мы не будем повторять результаты работы (2) и заметим, что они обобщаются на наш случай, если в (2) заменить h на $\sqrt{h^2 + (\pi n/b)^2}$.

Поэтому ниже мы исследуем случай четной функции параболического цилиндра, через которую выражается потенциал $A_n^{(1)}$. Граничные условия в точке $\tau_1 = 1$ приводят к следующим дисперсионным соотношениям

$$\begin{aligned} {}_0U_{i,n}(\sqrt{\Delta_n a \beta}) &= 0, \\ eU_{i,n}(\sqrt{\Delta_n a \beta}) &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

дающие зависимость между параметрами $\Delta_n a \beta$ и μ . В соответствии с теоремой Штурма—Лиувилля уравнения (14) имеют бесконечное число ветвей, причем, каждая из этих ветвей определена в области $0 < \mu < m\pi$, где m —номер ветви. Граничные значения каждой функции в своей области могут быть легко найдены. В самом деле, при малых $\Delta_n a \beta$ ветви обеих функций для нулей могут быть представлены формулами

$$\operatorname{tg} \mu = - \frac{1}{4\mu^2} \left(\frac{2}{3} \mu^2 \pm 1 \right) \left(\Delta_n a \beta \right)^2,$$

где знак плюс берется для функции $eU_{i,n}$ и знак минус — для ${}_0U_{i,n}$. Очевидно, что при малых $\Delta_n a \beta$ имеем $\mu \approx \pi m$ и график для четной функции идет ниже графика для нечетной. При $\mu = 0$ (см. (2)) соответствующие значения функции могут быть найдены из соотношений

$$J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\Delta_n a \beta}{2}\right) = 0 \text{ или } J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\Delta_n a \beta}{2}\right) = 0,$$

где первое равенство относится к нечетной, а второе — к четной функции параболического цилиндра.

Для первых двух ветвей рассматриваемые зависимости представлены графически на рис. 1 в виде сплошных кривых, которые рассчитывались по представлениям функций параболического цилиндра в виде степенных рядов, (см. (2)).

Точные выражения для $V_n^{(1)}$ оказываются сложными для физического анализа. Поэтому ниже мы получим, как и в (2), приближенное решение методом ВКБ, справедливое в достаточно широкой области значений переменных. Следуя (2), получим

$$V_n^{(1)} = C_n \left(\frac{\Delta_n^2 a^2 \beta^2}{\mu^2} \tau^2 + 1 \right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \cos \frac{\mu^2}{\Delta_n a \beta} \int_0^{\tau} \sqrt{1 + \tau^2} d\tau, \quad (15)$$

причем область применимости этой формулы дается неравенством

$$0,105 \frac{\Delta_{n\alpha\beta}}{\mu^2} \ll 1 \quad (16)$$

при любых значениях η .

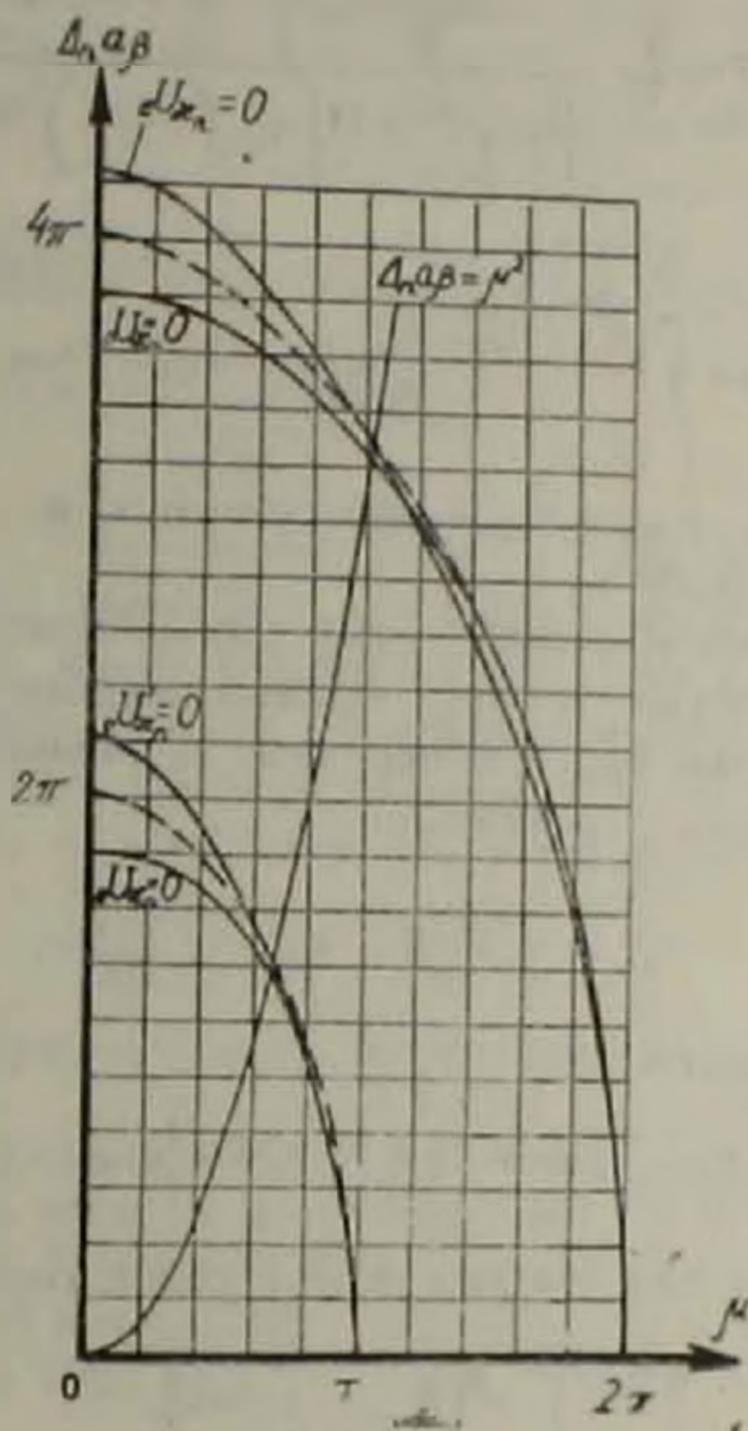


Рис. 1

Первое из граничных условий $V_n^{(1)}(0) = 0$ удовлетворяется автоматически с точностью рассматриваемого приближения (16), а второе условие $V_n^{(1)}(1) = 0$ приводит к следующему уравнению

$$\sqrt{1 + \gamma_n^2} + \frac{1}{\gamma_n} \ln \left(\gamma_n + \sqrt{1 + \gamma_n^2} \right) = \frac{2\pi m}{\mu} \quad (17)$$

где $\gamma_n = \Delta_{n\alpha\beta}/\mu$. Это уравнение дает зависимость между параметрами $\Delta_{n\alpha\beta}$ и μ . Графически эта связь изображена на рис. 1 пунктирной линией для $m = 1, 2$. На этом же рисунке нанесена кривая $\Delta_{n\alpha\beta} = \mu^2$, дающая запас точности в один порядок. Заметим, что расхождение мало между точным и приближенным значениями функции для любых значений μ и $\Delta_{n\alpha\beta}$ и уже при $m = 2$ составляет несколько процентов при малых μ , где нарушается условие (16), и при дальнейшем увеличении m это расхождение стремится к нулю. Заметим, что отклонения точных значений от приближенных, даваемых соотношением (15),

оказываются, как это видно из рис. 1, при малых ρ , разных знаков.

Поступая аналогично со вторым уравнением (11), получим в конечном счете:

$$A_n^{(1)}(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \left\{ i x_{nm} \int_0^{\gamma_{nm} \eta} \sqrt{1 + \zeta^2} d\zeta \right\}}{\left\{ (\gamma_{nm}^2 \eta^2 + 1) \left[\gamma_{nm}^2 \left(\xi + \frac{1}{\beta} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{4}} \times \right.} \\ \left. \times \left[a_{nm} \exp \left\{ i x_{nm} \int_0^{\gamma_{nm} \left(\xi + \frac{1}{\beta} \right)} \sqrt{1 + \zeta^2} d\zeta \right\} + b_{nm} \exp \left\{ -i x_{nm} \int_0^{\gamma_{nm} \left(\xi + \frac{1}{\beta} \right)} \sqrt{1 + \zeta^2} d\zeta \right\} \right] \right\}}, \quad (18)$$

где $\gamma_{nm} = \Delta_n a \beta / \rho_m$. a_{nm} и b_{nm} — определяются из начальных условий рассматриваемой задачи.

Из выражения (18) видно, что здесь образуются своеобразные „динамические“ моды в виде прямой и обратной стоячих волн. Мгновенные частоты ω_{nm}^{\pm} и поперечные волновые числа $k_{nm\perp}^{\pm}$ определяются из обычных соотношений

$$\omega_{nm}^{\pm} = c \frac{\partial \Phi_{nm}^{\pm}}{\partial \tau}, \quad k_{nm\perp}^{\pm} = \frac{\partial \Phi_{nm}^{\pm}}{\partial x}, \quad (19)$$

где

$$\Phi_{nm}^{\pm} = x_{nm} \left\{ \int_0^{\gamma_{nm} \left(\xi + \frac{1}{\beta} \right)} \sqrt{1 + \zeta^2} d\zeta + \int_0^{\gamma_{nm} \eta} \sqrt{1 + \zeta^2} d\zeta \right\}.$$

Заметим, что они связаны между собой соотношением

$$\left(\frac{\omega_{nm}^{\pm}}{c} \right)^2 - \left(k_{nm\perp}^{\pm} \right)^2 = \Delta_n^2,$$

справедливым для стационарного волновода.

Следует также отметить, что при $b \rightarrow \infty$ функция $A_n^{(1)}$ описывает волну типа ТМ в плоском волноводе. Все приведенные выше результаты остаются справедливыми для этого случая, если в них положить $b = \infty$.

Ленинградский ордена Ленина электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

И. А. ПИРОВОЙ, Г. А. ГИРЬНИЦА

Անհավասարաչափ շարժվող սահման ունեցող ալիքատարում
էլեկտրամագնիսական ալիքների տարածման մասին

Հետազոտվում է էլեկտրամագնիսական ալիքի տարածումն ուղղանկյուն ալիքատարի առանցքի երկայնառիցայամբ, երբ ալիքատարի պատերից մեկը շարժվում է $x = \sqrt{a^2 + 2avt}$ օրենքով պատի նորմալ ուղղությամբ: Փոփոխականի փոխարինման միջոցով շարժվող պատով տիրույթը ձևափոխվում է

ստացիոնար ուղղանկյուն տիրույթի, որտեղ ուլիթի տարածումը նկարագրվում է փոփոխական դործակիցներով ալիքային հավասարումով: Առաջարկված փոփոխական փոխարինումը թույլատրում է նրանց անշատումը հավասարման մեջ և բերել այն 2 պարարտիկ զլանի ֆունկցիաների հավասարմանը: Ցույց է տրվում, որ շարժվող պատով ալիքատարում դաշտի բաժանումը TE և TM մոդաների հնարավոր չէ (բացի H_{n0} տիպի ալիքից), այլ առաջանում է «հիրրիդային» մոդաների նոր տիպ: Ստացված են դիտարկվող խնդրի ճշգրիտ լուծումը և արտահայտություններ էլեկտրամագնիսական ալիքի դաշտի համար: Ուսումնասիրված է նրա սպեկտրը և լայնական ալիքային թվերի կախումը պատի շարժումից: Ավելի մանրամասն արդյունքներ են ստացված վեր մոտավորությամբ, երբ՝

$$\frac{0,105V^2 h^2 + (\pi n/b)^2 a^2}{c^2(h)} \ll 1,$$

որտեղ h - տարածման հաստատունն է, a և b - ալիքատարի սկզբնական չափերն են, v - պատի սկզբնական արագությունը, γ - բաժանման հաստատունը, որը որոշված է որպես ֆունկցիա h -ից: Ցույց է տրված, որ ալիքաթարթային հաճախականությունը և լայնական ալիքային թիվը կապված են սովորական առնչությամբ, որը ճիշտ է ստացիոնար ալիքատարի համար: Վերջինս նշանակում է, որ պատի շարժումը չի կարող ալիքատարը դարձնել անդրսահմանային:

ЛИТЕРАТУРА — ЦИТАЦИИ И ССЫЛКИ

- ¹ А. И. Весницкий, Распространение электромагнитных волн в волноводе с подвижными границами, Изв. высш. уч. з-ва «Радиофизика», 12, № 6, 935 (1969) ² К. А. Бурсуков, Г. А. Григорян, К теории волновода с подвижными границами, Изв. высш. уч. з-ва, «Радиофизика», 18, вып. 5 (1975) ³ C. P. Wells, R. D. Spence, The parabolic cylinder function, J. Math. Phys. Mass. Inst. Techn., 24, No. 1, 51(1945).