ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 4

УДК 539.301

МЕХАНИКА

Р. К. Алексанян

Об одном классе решений уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 16/VII 1975)

Предлагается путь построения для угловой области системы собственных функций однородного дифференциального уравнения в частных производных одного порядка с постоянными коэффициентами. Эта возможность осуществляется в случае плоской задачи теории упругости для однородного анизотропного тела. С помощью построенной системы собственных функций исследуется поведение напряжений в угловой точке поперечного сечения призматического тела, находящегося в условиях плоской деформации и имеющего в каждой точке плоскость упругой симметрии, нормальной к образующим его боковой поверхности.

Начало прямолинейной декартовой системы координат поместим в угловой точке сечения призматического тела, направляя ось z нормально к плоскости упругой симметрии, а ось x по касательной одного из ветвей контура поперечного сечения. Угол между касательной второй ветви контура и осью x обозначим через α_0.

При отсутствии массовых сил функция напряжений удовлетворяет дифференциальному уравнению [1]

$$a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}-2a_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x^3\partial y}+(2a_{12}+a_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}-2a_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x\partial y^3}+a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=0, \tag{1.1}$$

где a_{mn} упругие постоянные материала.

Предполагается, что примыкающие к угловой точке части контура поперечного сечения свободны от внешних нагрузок. Граничные условия можно представить в виде

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\sin\alpha_0+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cos\alpha_0\right|_{\substack{x=r\cos\alpha_0\\ y=r\sin\alpha_0}}=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\sin\alpha_0 + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cos\alpha_0\Big|_{\substack{x=r\cos\alpha_0\\ y=r\sin\alpha_0}} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Big|_{y=0} = 0. \tag{1.2}$$

Решение уравнения (1.1) представляется в следующем виде

$$F(x, y) = A(x + \delta y)^{\lambda+1}. \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в (1.1), получаем относительно δ алгебраическое уравнение четвертого порядка [1].

$$a_{22} - 2a_{26}\delta + (2a_{12} + a_{66})\delta^2 - 2a_{16}\delta^3 + a_{11}\delta^4 = 0. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4) не имеет действительных корней, что на основании положительности потенциальной энергии деформации доказано в [1].

Рассмотрим два возможных случая.

1. Когда корни уравнения (1.4) δ_k $(k=1, 2, 3, 4)$ — простые.

$$\delta_2 = \bar{\delta}_1, \quad \delta_4 = \bar{\delta}_3. \tag{1.5}$$

Решение (1.1), соответствующее каждому λ, представим в виде суммы линейно независимых решений

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{4} A_k(x + \delta_k y)^{\lambda+1}, \tag{1.6}$$

где A_k — комплексные постоянные.

Удовлетворяя граничным условиям (1.2) на основании (1.6) для коэффициентов A_k получаем систему однородных уравнений.

$$\begin{aligned}
&A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0;\\
&\delta_1 A_1 + \delta_2 A_2 + \delta_3 A_3 + \delta_4 A_4 = 0;\\
&a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 = 0;\\
&\delta_1 a_1 A_1 + \delta_2 a_2 A_2 + \delta_3 a_3 A_3 + \delta_4 a_4 A_4 = 0.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$a_k = (\cos\alpha_0 + \delta_k \sin\alpha_0)^\lambda .$$

Введя обозначения

$$\varphi_k = \arg(\cos\alpha_0 + \delta_k \sin\alpha_0), \quad (k=1, 3) \tag{1.8}$$

$$\delta_{1,2} = \sigma \pm i\nu; \quad \delta_{3,4} = \alpha \pm i\beta$$

из условия существования нетривиального решения системы (1.8) получаем следующее уравнение относительно λ

$$\begin{aligned}
&4\nu\beta\,\mathrm{ch}(\lambda\ln P) + [(\sigma - \alpha)^2 + (\nu - \beta)^2]\cos\lambda(\varphi_1 + \varphi_3) -\\
&- [(\sigma - \alpha)^2 + (\nu + \beta)^2]\cos\lambda(\varphi_1 - \varphi_3) = 0,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где

$$P = \frac{R_1}{G_1}, \qquad \begin{aligned} R_1 &= [(\cos\alpha_0 + \sigma\sin\alpha_0)^2 + \nu^2\sin^2\alpha_0]^{1/2},\\ G_1 &= [(\cos\alpha_0 + \alpha\sin\alpha_0)^2 + \beta^2\sin^2\alpha_0]^{1/2}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и двум конкретным условиям на замыкающей части контура угловой области, представляется в виде суммы собственных функций

$$F(x,\ y)=\sum_{(\lambda_n)}\sum_{k=1}^{4} A_k(x+\delta_k y)^{\lambda_n+1}, \tag{1.10}$$

где первую сумму необходимо распространять на все корни трансцендентного уравнения (1.9), имеющие положительные действительные части, что вытекает из требования конечности накопленной удельной потенциальной энергии деформации в окрестности угловой точки.

Переходя к полярной системе координат $(r,\ \varphi)$ решение (1.10) можно представить с разделенными переменными

$$F(r,\ \varphi)=\sum_{(\lambda_n)} r^{\lambda_n}[R^{\lambda_n+1}(A_1\cos\lambda^+\gamma+A_2\sin\lambda^+\gamma)+$$
$$+G^{\lambda_n+1}(A_3\cos\lambda^+\theta+A_4\sin\lambda^+\theta)], \tag{1.11}$$

где A_k—действительные постоянные,

$$R=|(\cos\varphi+\alpha\sin\varphi)^2+\nu^2\sin^2\varphi|^{1/2},$$
$$G=|(\cos\varphi+\alpha\sin\varphi)^2+\beta\sin^2\varphi|^{1/2},$$
$$\gamma=\arg(\cos\varphi+\alpha\sin\varphi+i\nu\sin\varphi),\quad \theta=\arg(\cos\varphi+\alpha\sin\varphi+i\beta\sin\varphi).$$

Внутри рассматриваемой области γ и θ изменяются в интервалах

$$0\leqslant\gamma\leqslant\varphi_1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\varphi_1.$$

2. Рассмотрим случай двукратного корня уравнения (1.4)

$$\delta=\delta_1=\delta_3,\quad \bar{\delta}=\delta_2=\delta_4,\quad \delta=\alpha+i\nu. \tag{2.1}$$

Решение уравнения (1.1), соответствующее каждому значению λ представляется в виде

$$F(x,\ y)=A(x+\delta y)^{\lambda+1}+B(x+\bar{\delta}y)^{\lambda+1}+C(x+\bar{\delta}y)(x+\delta y)^{\lambda}+$$
$$+D(x+\delta y)(x+\bar{\delta}y)^{\lambda}, \tag{2.2}$$

где $A,\ B,\ C,\ D$—комплексные постоянные.

Переходя в (2.2) от декартовых координат к полярным, имеем

$$F(r,\ \varphi)=(r\rho)^{\lambda+1}(A\cos\lambda^+\theta+B\sin\lambda^+\theta+C\cos\lambda^-\theta+D\sin\lambda^-\theta), \tag{2.3}$$

где $A,\ B,\ C,\ D$—действительные постоянные, $\lambda^+=\lambda+1$, $\lambda^-=\lambda-1$

$$\rho=|(\cos\varphi+\alpha\sin\varphi)^2+\nu^2\sin^2\varphi|^{1/2},\quad \theta=\arg(\cos\varphi+\alpha\sin\varphi+i\nu\sin\varphi)$$

В случае изотропного материала: $\alpha=0$, $\nu=1$, $\rho=1$ получаем хорошо известное представление решения бигармонического уравнения [2,3].

$$F(r,\ \varphi)=r^{\lambda+1}(A\cos\lambda^+\varphi+B\sin\lambda^+\varphi+C\cos\lambda^-\varphi+D\sin\lambda^-\varphi).$$

Граничные условия в полярных координатах имеют вид:

$$F|_{\varphi=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0}=0;$$

$$F|_{\varphi=\alpha_0}=0, \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\alpha_0}=0. \tag{2.5}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.5), имеем:

$$A+C=0,$$
$$\lambda^+B+\lambda^-D=0,$$
$$A\cos\lambda^+\theta_1+B\sin\lambda^+\theta_1+C\cos\lambda^-\theta_1+D\sin\lambda^-\theta_1=0,$$
$$-A\lambda^+\cos\lambda^+\theta_1+B\lambda^+\cos\lambda^+\theta_1-C\lambda^-\sin\lambda^-\theta_1+D\lambda^-\cos\lambda^-\theta_1=0, \tag{2.6}$$

где

$$\theta_1=\arg(\cos\alpha_0+\sigma\sin\alpha_0+i\nu\sin\alpha_0).$$

Для λ получается уравнение

$$\lambda^2\sin^2\theta_1-\sin^2\lambda\theta_1=0. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) идентично уравнению, соответствующему изотропному клину ([3,5]) с углом раствора θ_1.

Общее решение представляется в виде ряда

$$F(r,\varphi)=\sum_{(\lambda_n)}(r\omega)^{\lambda_n+1}(A_n\cos\lambda_n^+\theta+B_n\sin\lambda_n^+\theta+C_n\cos\lambda_n^-\theta+D_n\sin\lambda_n^-\theta) \tag{2.8}$$

здесь

$$0\leqslant\theta\leqslant\theta_1.$$

Представление функции напряжения в виде (1.11) или (2.8) дает возможность исследовать поведение напряжений в окрестности угловой точки поперечного сечения призматического анизотропного тела, находящегося в условиях плоской задачи теории упругости. Если уравнения (1.9) и (2.7) имеют корни в полосе $0<\mathrm{Re}\,\lambda<1$ комплексной плоскости λ напряжения, вычисляемые по формулам

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2}, \qquad \sigma_\varphi=\frac{\partial^2F}{\partial r^2}, \qquad \sigma_{r\varphi}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) \tag{2.9}$$

при $r\to0$ неограниченно возрастают. Порядок особенности равен $1-\mathrm{Re}\,\lambda_1$, где λ_1 — корень уравнения (1.9) или (2.7) с наименьшей действительной частью в полосе $0<\mathrm{Re}\,\lambda<1$.

Напряженное состояние во втором случае зависит от двух упругих констант материала. Этот случай включает в себя частный вид общей анизотропии. Отметим, что в случае общей ортотропии напряженное состояние также зависит от двух констант материала. Корни уравнения (1.5) имеют вид $\mu=\pm(\sigma\pm i\nu)$, поэтому в случае общей ортотропии характеристическое уравнение для собственного значения λ получается из уравнения (1.9) соответствующим подбором аргументов φ_k комплексных чисел a_k. В случае изотропного материала уравнения для λ получается из (2.8), если в нем заменить θ_1 через α_0.

Порядок особенности напряжений на вершине угла с раствором α_0 равен порядку особенности напряжений для изотропного материала при угле, равном ϑ_1.

Известно, что в решениях первой краевой задачи теории упругости изотропного тела особенность напряжений в угловых точках области имеется при углах $\alpha_0 > \pi$ ([5]). Во втором случае рассмотренной выше анизотропии в зависимости от $\zeta = \mu + i\nu$

$$\vartheta_1 = \arg(\cos\alpha_0 + \mu \sin\alpha_0 + i\nu\sin\alpha_0)$$

может быть больше или меньше, чем α_0, и так как при углах $\alpha_0 > \pi$ большему углу соответствует особенность более высокого порядка, то в зависимости от анизотропии при одном и том же угле α_0 порядок особенности напряжений может быть выше или ниже, чем особенность напряжений, полученная в случае изотропного тела, что не согласуется с утверждением работы ([4]) о том, что „... наиболее слабая особенность поля напряжений имеет место в случае изотропного тела...".

Случаи $\alpha_0 = \pi$, $\alpha_0 = 2\pi$ являются предельными в том смысле, что в общем случае анизотропии приведенные углы φ_k в характеристических уравнениях для собственных значений стремятся к π и 2π, если α_0 стремится к π и 2π.

Уравнения (1.9) и (2.7) в этих предельных случаях примут вид

$$\sin^2\lambda\pi = 0 \qquad \text{при} \quad \alpha_0 = \pi$$

$$\sin^2 2\lambda\pi = 0 \qquad \text{при} \quad \alpha_0 = 2\pi.$$

Следовательно, при $\alpha_0 = \pi$ особенность напряжений отсутствует, а в случае $\alpha_0 = 2\pi$, когда поперечное сечение тела превращается в область с разрезом, особенность напряжений в основании разреза имеет порядок 0,5.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Կ. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ

Անիզոտրոպ մարմնի առաձգականության տեսության հարթ խնդրի հավասարումների լուծումների մի դասի մասին

Աշխատանքում առաջարկվում է անկյունային տիրույթների համար անիզոտրոպ մարմնի առաձգականության տեսության հարթ խնդրի հավասարումների լուծումների կառուցման եղանակ։ Այդ հնարավորությունն իրականացվում է արտաքին ուժից ազատ կողմերով անկյունային տիրույթի դեպքում։ Կառուցված սեփական ֆունկցիաների օգնությամբ հետազոտվում է լարումների վարքը պրիզմատիկ մարմնի ընդլայնական հատվածքի եզրագծի անկյունային կետում, երբ մարմնի նյութն ունի մարմնի կողմնային մակերևույթի ծնիչին ուղղահայաց առաձգական սիմետրիայի մեկ հարթություն։

Երբ լարվածային վիճակը կախված է նյութի առաձգական չորս կամ երկու հաստատուններից, ստացված են սեփական արժեքների համար հավասարումներ, որոնց լուծումները տալիս են լարումների եզակիության կարգը անկյունային կետում։ Իզոտրոպ նյութի դեպքում անկյունային կետում լարումների եզակիությունների ուսումնասիրությունների հայտնի արդյունքները հնարավոր է օգտագործել անիզոտրոպության մասնավոր դեպքերի համար։ Պրիզմատիկ մարմինների անկյունային կետերում հնարավոր է, որ անիզոտրոպության դեպքում լարումները ունենան ավելի ցածր կարգի եզակիություն, քան իզոտրոպության դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Г. Лехницкий.* Теория упругости анизотропного тела, Гос. изд. тех.-теор. лит. М.—Л., 1950. [2] *M. Krein.* Abh. Aerodyn. Inst. Tech. Hochschule Aachen. 7. 1927. [3] *M. L. Williams.* J. Appl. Mech, 19, 526 (1952). [4] *Д. Боджи.* Труды ASME, т. 39, сер. E, № 4 (1972). [5] *Я. С. Уфлянд.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Изд. АН СССР, М.—Л., 1963.