LXI 1975 4

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Б. С. Нахапетян

Центральная предельная теорема для случайных полей, удовлетворяющих условию сильного перемешивания

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 18/VII 1975)

Пусть ξ_t, $t\in Z^\nu$ случайное поле со значениями в некотором измеримом пространстве $(X_t, \mathfrak{F}_t)$ со стандартной σ — алгеброй $\mathfrak{F}_t$ его подмножеств. Стандартность σ — алгебры $\mathfrak{F}_t$ означает, что существует сепарабельное полное метрическое пространство $\bar{X}_t \supset X_t$ такое, что X_t является борелевским подмножеством в $\bar{X}_t$ и σ — алгебра $\mathfrak{F}_t$ совпадает с совокупностью борелевских подмножеств $\bar{X}_t$, содержащихся в X_t. Предполагается, что все пространства $(X_t, \mathfrak{F}_t)$, $t\in Z^\nu$ являются экземплярами одного и того же пространства (X, σ). При любом $J\subset Z^\nu$, $(X_J, \mathfrak{F}_J)$ будет обозначать произведение пространств $(X_t, \mathfrak{F}_t)$, $t\in J$. Пусть I, V — конечные множества такие, что $I\cap V=\varnothing$ и

$$\gamma(I, V)=\sup_{A\in\mathfrak{F}_I,\, B\in\mathfrak{F}_V,\, P_V(B)>0} |P_{I/V}(A/B)-P_I(A)| \tag{1}$$

Здесь P_I, $I\subset Z^\nu$, $|I|<\infty$ * — конечномерные распределения случайного поля ξ_t, $t\in Z^\nu$ и $P_{I/V}(A/B)$ — условная вероятность события $A\in\mathfrak{F}_I$ при условии $B\in\mathfrak{F}_V$. Пусть функция $\varphi_I(d)$, $d\in R^1$ такова, что $\varphi_I(d)\to 0$ при $d\to\infty$ и фиксированном I. Мы скажем, что случайное после ξ_t, $t\in Z^\nu$ удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания (р. с. п.), если при любых конечных I, V, $I\cap V=\varnothing$ имеет место неравенство

$$\gamma(I, V)\leqslant\varphi_I(d(I, V)), \tag{2}$$

где $d(I, V)$ — расстояние между множествами I, V. Пусть $\mu_t(x)$, $x\in X$ — некоторая измеримая функция $t\in Z^\nu$. Обозначим при любом конечном $I\subset Z^\nu$

$$U_I^\mu(x)=\sum_{t\in I}\mu_t(x_t),\ x\in X_I,\ x=(x_t, t\in I) \tag{3}$$

* Всюду в дальнейшем $|\cdot|$ — число точек в конечном множестве.

Справедлива

Теорема 1 Пусть

а) стационарное случайное поле ξ_t, $t \in Z^\nu$ *со значениями в* (X_t, σ_t) *удовлетворяет условию р. с. п., причем*

$$\varphi_I(d) \leqslant |I| \varphi(d), \quad \sum_{s \in Z^\nu \setminus \{0\}} \varphi^{\frac{1}{2}}(|s|) < \infty$$

б) $M|\mu_I(\xi_I)|^2 = C^{(1)} < \infty$

в) для любого куба $I \subset Z^\nu$, $|I| < \infty$

$$\sigma^2_{I,\mu} > C^{(2)}|I|, \; C^{(2)} > 0,$$

где $\sigma^2_{I,\mu}$ *— дисперсия величины* $U^\mu_I(\xi_I)$, $\xi_I = (\xi_t, t \in I)$. *Тогда для любой последовательности кубов* I_n *с центром в начале координат и длиной стороны* $2n$

$$\lim_{n \to \infty} P_r\left(\frac{U^\mu_{I_n}(\xi_{I_n}) - MU^\mu_{I_n}(\xi_{I_n})}{\sigma_{I_n,\mu}} < \alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Доказательство этой теоремы основано на методе Бернштейна сведения к независимым случайным величинам и использует аналогичную теорему Ибрагимова ([1], стр. 437), доказанную для одномерного случая. Нетривиальность обобщения на многомерный случай заключается в том, что в этом случае граница множества растет с его ростом. Некоторые результаты в этом направлении имеются в работе ([2]).

Пусть теперь ξ_t, $t \in Z^\nu$ гиббсовское случайное поле с потенциалом Φ и значениями в пространстве (X_t, σ_t, m_t) $m_t(X_t) > 0$ σ — алгебра σ_t — стандартна (см. ([4])). Рассмотрим следующие классы потенциалов (см. ([3]), ([4]))

$$N_0 = \left\{\Phi : \frac{(m(X) e^{\|\Phi\|})^2}{1 + m(X) e^{-2\|\Phi\|}} \sum_{J: 0 \in J \subset Z^\nu, |J| < \infty} |J| \sup_{x \in X_J} |\Phi(x)| < 1\right\}$$

$$\|\Phi\| = \sum_{J: 0 \in J \subset Z^\nu} |J| \sup_{x \in X_J} |\Phi(x)| < \infty$$

Пусть $\theta \in X$ некоторый выделенный элемент из X („вакуум") такой, что $\Phi(x) = 0$ при любом $x = (x_t, t \in I)$ $I \subset Z^\nu$, $|I| < \infty$ таким, что $x_t = \theta$ хотя бы при одном $t \in I$. Введем пространства $X^*_t = X_t \setminus \{\theta\}$, σ — алгебру $\sigma^*_t = \{A \cap X^*_t : A \in \sigma_t\}$ и меру m^*_t, являются сужением меры m_t на σ — алгебру σ^*_t. Обозначим

$$N^\nu_0 = \{\Phi : C^{(1)}_{\Phi,m}(1 + C^{(2)}_{\Phi,m}) < 1\},$$

$$C^{(1)}_{\Phi,m} = \frac{e^{\|\Phi\|} m^*(X^*)}{1 + e^{\|\Phi\|} m^*(X^*)},$$

$$C^{(2)}_{\Phi,m} = 2(1+2e^{\|\Phi\|}m^*(X^*))(\exp\{e^{\|\Phi\|}-1\}-1)$$

$$\|\Phi\| = \sum_{J:0\in J\subset Z^\nu} \sup_{x\in X_J} |\Phi(x)| < \infty.$$

Справедливы следующие теоремы (ср. ([3]), ([4]))

Теорема 2. *Для всякого потенциала $\Phi\in N_\mu$, соответствующее ему гиббсовское случайное поле существует, единственно и удовлетворяет условию р. с. п., причем функция*

$$\varphi_J(d) \leq |J|\varphi(d).$$

Если потенциал Φ финитен ($\Phi(x_J)=0$, $D(J)>C$, $D(J)$ — диаметр множества J), то функцию $\varphi(d)$ можно положить равной

$$\varphi(d) = e^{-\alpha d},\ \alpha > 0.$$

Если потенциал Φ убывает так, что

$$\sum_{J:0\in J\subset Z^\nu, |J|<\infty} |J|(D(J))^\gamma \sup_{x\in X_J} |\Phi(x)| < \infty, \quad \gamma > 0$$

то функцию $\varphi(d)$ можно положить равной

$$\varphi(d) = \frac{\beta(d)}{d^\gamma},\ \beta(d)\to 0,\ d\to\infty.$$

Теорема 3. *Для всякого потенциала $\Phi\in N_\mu^m$, соответствующее ему гиббсовское случайное поле существует, единственно и удовлетворяет условию р. с. п., причем функция*

$$\varphi_J(d) \leq |J|\varphi(d).$$

При финитном потенциале $\varphi(d)$ можно положить равной

$$\varphi(d) = e^{-\bar{\alpha} d},\ \bar{\alpha} > 0.$$

Если потенциал Φ убывает так, что

$$\sum_{J:0\in J\subset Z^\nu, |J|<\infty} (d(J))^\gamma \sup_{x\in X_J} |\Phi(x)| < \infty, \quad \gamma > 0$$

то функцию $\varphi(d)$ можно положить равной

$$\varphi(d) = \frac{\bar{\beta}(d)}{d^\gamma},\ \bar{\beta}(d)\to 0,\ d\to\infty.$$

Как легко видеть из результатов работ ([3]), ([4]) для гиббсовских случайных полей, с потенциалами из класса N_μ^m, а также для гиббсовских случайных полей с невырожденными потенциалами из класса N_μ выполняется условие в) теоремы 1. Из вышеприведенных теорем и последнего утверждения вытекают следующие теоремы.

Теорема 4. *Для всякого гиббсовского случайного поля с невырожденным потенциалом $\Phi \in N_\mu$ таким, что*

$$\sum_{J:0\in J\subset Z^\nu,\,|J|<\infty} (D(J))^2\,|J| \sup_{x\in X_J} |\Phi(x)| < \infty$$

справедлива ц. п. т.

Теорема 5. *Для всякого гиббсовского случайного поля и потенциалом $\Phi \in N_\mu^m$ таким, что*

$$\sum_{J:0\in J\subset Z^\nu,\,|J|<\infty} (D(J))^2 \sup_{x\in X_J} |\Phi(x)| < \infty$$

справедлива ц. п. т.

Отметим, что для гиббсовских случайных полей с парным финитным потенциалом ц. п. т. для энергии и числа частиц доказана в работе Минлоса и Халфиной [5], однако результаты в [5] формулируются в терминах потенциала и не используют условий слабой зависимости.

В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность Р. Л. Добрушину за постановку задачи и внимание к работе.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Ս. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ

Կենտրոնական սահմանային թեորեմ ուժեղ խառնուրդի պայմանին բավարարող պատահական դաշտերի համար

Հոդվածում ապացուցված է կենտրոնական սահմանային թեորեմ ուժեղ խառնուրդի պայմանին բավարարող պատահական դաշտերի համար։

Արդյունքն օգտագործվում է անվերջությունում բավականաչափ արագ նվազող պոտենցիալով Գիբսյան պատահական դաշտերի համար կենտրոնական սահմանային թեորեմ ապացուցելիս։ Ֆիզիկորեն դա նշանակում է, որ իր միջին արժեքի նկատմամբ գումարային սպինի ֆլուկտուացիայի հավանականությունների բաշխումն ասիմպտոտորեն Գաուսյան է, որը կարևոր է անսամբլների սահմանային համարժեքության ապացուցման համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник*, Независимые и стационарно связанные величины, Изд. «Наука», 1965. [2] *M. Duneau, D. Iagolnitzer, B. Souillard*, Comm. Math. Phys. 61 (1973). [3] *Р. Л. Добрушин, Б. С. Нахапетян*, Теорет. и матем. физика, 20, 2, 223 (1974). [4] *Б. С. Нахапетян*, „Известия АН Арм. ССР", Сер. „Математика", 3, 41 (1975). [5] *Р. А. Минлос, А. М. Халафина*, „Известия АН СССР", сер. матем. 34, 5, 1173 (1970)