ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 4

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

А. Х. Симонян

О среднем числе уклонений разности гауссовского стационарного процесса и аппроксимирующей его ломаной

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 2/VII 1975)

В работе найден главный член асимптотики среднего числа уклонений (выбросов за фиксированный уровень a) разности $\xi_t^{\Delta} = \xi_t - \hat{\xi}_t$ дифференцируемого в среднем квадратичном гауссовского стационарного процесса ξ_t и аппроксимирующей его ломаной $\hat{\xi}_t$.

Пусть процесс ξ_t, $E\xi_t = 0$, имеет ковариационную функцию ρ_t с непрерывной компонентой в спектре и

$$\rho_t = \rho_0 - |\rho_0''| \frac{t^2}{2} + bc_t \quad \text{при } |t| < \varepsilon, \tag{1}$$

где $b > 0$, $\varepsilon > 0$, а неотрицательная четная функция c_t дважды непрерывно дифференцируема при $0 \leq t < \varepsilon$, правильно меняется в нуле с показателем β, $2 < \beta < 4$ ([1]) и

$$\lim_{t \downarrow 0} c_t \cdot t^{-\beta} = 0. \tag{2}$$

Не уменьшая общности, полагаем далее $\rho_0 = |\rho_0''| = 1$, т. е. $E\xi_t^2 = E\dot{\xi}_t^2 = 1$, где $\dot{\xi}_t$ есть производная процесса ξ_t в среднем квадратичном. В качестве функции c_t можно взять, например, функцию $|t|^{2+\theta}$, $0 < \theta \leq 1$ ([2]).

Будем рассматривать процесс ξ_t при $t \in [0, h]$, $h \leq \varepsilon$. Обозначим $u = \frac{t}{h}$. Тогда $\xi_t = \xi_{hu}$ и $u \in [0, 1]$. Для условного среднего $E[\xi_{hu} | \xi_0 = x_0, \xi_h = x_1]$ процесса ξ_{hu} справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для любых x_0, x_1 и любого фиксированного $u \in [0,1]$ имеет место*

$$\lim_{h \downarrow 0} E[\xi_{hu} | \xi_0 = x_0, \xi_h = x_1] = x_0(1-u) + x_1 u. \tag{3}$$

Доказательство этой леммы основывается на формуле

$$E[\xi_{hu}|\xi_0=x_0, \xi_h=x_1]=-\frac{f_1(h,\ u,\ x_0,\ x_1)}{f_2(h)}, \tag{4}$$

где

$$f_1(h,u,x_0,x_1)=\begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_h & \rho_{hu} \\ \rho_h & \rho_0 & \rho_{h(1-u)} \\ x_0 & x_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{а} \qquad f_2(h)=\begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_h \\ \rho_h & \rho_0 \end{vmatrix} \tag{3}$$

с использованием выражений (1), (2) и предельным переходом при $h \downarrow 0$.

Известно, что $E[\xi_{hu}|\xi_0=x_0,\ \xi_h=x_1]$ есть наилучшая оценка для гауссовского процесса ξ_{hu} $(u \in [0,\ 1])$ при $\xi_0=x_0$, $\xi_h=x_1$ в том смысле, что условная дисперсия

$$E[[\xi_{hu}-E(\xi_{hu}|\xi_0=x_0,\ \xi_h=x_1)]^2|\xi_0=x_0,\ \xi_h=x_1] \tag{5}$$

минимальная [4], а по лемме 1 для $E[\xi_{hu}|\xi_0=x_0,\ \xi_h=x_1]$ главным членом асимптотики при $h \downarrow 0$ является отрезок $x_0(1-u)+x_1u$, $u \in [0,1]$, так что главный член асимптотики для (5) при $h \downarrow 0$ заключается в выражении

$$E[|\xi_{hu}-x_0(1-u)-x_1u|^2|\xi_0=x_0,\quad \xi_h=x_1].$$

На основании приведенных рассуждений при достаточно малых h будем аппроксимировать процесс ξ_{hu} на $[0,1]$ процессом $\hat{\xi}_{hu}= =(1-u)\xi_0+u\xi_h$.

Рассмотрим процесс $\xi^L_{hu}=\xi_{hu}-\hat{\xi}_{hu}$ и обозначим через $r_L(u,\ v)$ $(u,\ v \in [0,\ 1])$ его ковариационную функцию. Этот процесс гауссовский, дифференцируемый в среднем квадратичном, со средним нуль, но уже нестационарный, как показывает следующая лемма.

Лемма 2.

$$\begin{aligned} r_L(u,\ v)=bh^\beta H_h[\,|u-v|^\beta - v(1-u)^\beta-(1-v)u^\beta - \\ -u(1-v)^\beta+u(1-v)-(1-u)v^\beta+(1-u)v](1+o(1)) \end{aligned} \tag{6}$$

при $h \downarrow 0$ для любых $u,\ v \in [0,\ 1]$.

Следствие.

$$D\xi^L_{hu}=2bh^\beta H_h u(1-u)[1-(1-u)^{\beta-1}-u^{\beta-1}](1+o(1)) \quad (h \downarrow 0) \tag{7}$$

Лемма 3.

$$\begin{aligned} E\xi'^L_{hu}\xi^L_{hu}=bh^{\beta-1}H_h[-(1-u)^\beta+(1-u)+u^\beta-u+ \\ +\beta u(1-u)^{\beta-1}-\beta(1-u)u^{\beta-1}](1+o(1)) \end{aligned} \tag{8}$$

при $h \downarrow 0$.

В леммах используем тот факт, что

$$c_h=h^\beta H_h, \tag{9}$$

где H_h медленно меняющаяся в нуле функция, т. е.

$$\lim_{h \downarrow 0}\frac{H_{xh}}{H_h}=1\,(x>0) \qquad [1], \tag{10}$$

а также то, что

$$c''_h = \beta h^{\beta-1} H_h (1+o(1)) \text{ при } h \downarrow 0. \tag{11}$$

Лемма 4.

$$D\dot\xi^L_{hu} = 2bh^{\beta-2} H_h [\beta(1-u)^{\beta-1} + \beta u^{\beta-1} - 1](1+o(1)) \quad при\ h \downarrow 0. \tag{12}$$

Лемма 4 также доказывается с применением формул (9) и (11).

Обозначим через $\tau_a^+(h)$ число пересечений снизу вверх фиксированного уровня a процессом ξ_t^L, $t \in [0, h]$ ([3]). Известно, что ([5])

$$E\tau_a^+(h) = \int_0^h dt \int_0^\infty z p_t(a, z)\, dz \tag{13}$$

где $p_t(a, z)$ есть плотность вероятности события $[\xi_t^L = a,\ \dot\xi_t^L = z]$ и

$$p_t(a, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Lambda}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(a, z)'\Lambda^{-1}(a, z)\right\},$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} D\xi_t^L & E\xi_t^L \dot\xi_t^L \\ E\xi_t^L \dot\xi_t^L & D\dot\xi_t^L \end{pmatrix}.$$

Наша цель найти главный член асимптотики выражения (13). Введем следующие обозначения

$$\gamma_1(u) = \beta(1-u)^{\beta-1} + \beta u^{\beta-1} - 1,$$

$$\gamma_2(u) = \frac{1}{2}\left\{-(1-u)^\beta + (1-u) + u^\beta - u + \beta u(1-u)^{\beta-1} - \beta(1-u)u^{\beta-1}\right\},$$

$$\gamma_3(u) = u(1-u)[1 - (1-u)^{\beta-1} - u^{\beta-1}],$$

$$\gamma_4(u) = 4\gamma_1(u)\gamma_3(u) - \gamma_2^2(u).$$

Лемма 5.

$$-\frac{1}{2}(a, z)'\Lambda^{-1}(a, z) = -\frac{\gamma_3(u)}{bh^{\beta-2}H_h}\left\{\left[z - \frac{a\gamma_2(u)}{h\gamma_3(u)}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{\gamma_3(u)h^2}\left[\gamma_1(u) - \frac{\gamma_2^2(u)}{\gamma_3(u)}\right]\right\}(1 + o(1))$$

при $h \downarrow 0$.

Лемма 5 следует из лемм (2)—(4).

Лемма 6.

$$E\tau_a^+(h) \sim \frac{1}{2\pi}\int_0^{1/2} \frac{\gamma_1^{1/2}(u)}{\gamma_3(u)} \exp\left\{-\frac{a^2\gamma_1(u)}{bh^\beta H_h \gamma_4(u)}\right\} du, \quad h \downarrow 0.$$

Теорема.

$$E\eta_a^+(h) \sim \frac{\nu(\beta)}{a} h^{\beta/2} H_h^{1/2} \exp\left\{-\frac{a^2}{b(1-2^{2-\beta})h^\beta H_h}\right\}, \qquad h \downarrow 0,$$

где

$$\nu(\beta) = \frac{\beta 2^{2-\beta}-1}{4}\left\{\frac{b(1-2^{2-\beta})2^{\beta-1}}{\pi\beta|\beta 2^{1-\beta}(\beta^2-5)+\beta+3|}\right\}^{1/2}.$$

Доказательство теоремы основано на применении метода Лапласа из теории асимптотических разложений.

Обозначим через $\eta_a(T)$ число выбросов процесса ξ_t^l за полосу $[-a, a]$ на промежутке времени $[0, T]$. Для этого промежутка $[0, T]$ главным членом асимптотики среднего числа $E\eta_a(T)$ будет

$$2T\frac{\nu(\beta)}{a} h^{\frac{\beta}{2}-1} H_h^{1/2} \exp\left\{-\frac{a^2}{b(1-2^{2-\beta})h^\beta H_h}\right\}, \qquad h \downarrow 0 \tag{14}$$

Следуя ([6]), будем говорить, что h и T изменяются согласованным образом, если

$$E\eta_a(T) = \mu = O(1) \qquad \text{при} \qquad h \downarrow 0 \quad \text{и} \quad T \uparrow \infty. \tag{15}$$

Пользуясь соотношениями (14) и (15) можно показать, что

$$h^\beta H_h \sim \left| \ln\left(\frac{2T\nu(\beta)}{\mu a}\right)^{\frac{b(1-2^{2-\beta})}{a^2}} \right|^{-1} \quad \text{при } T \uparrow \infty \quad \mu = O(1).$$

Отсюда можно получить при конкретных выражениях функции H_h главные члены асимптотики шага интерполяции h, когда $\mu = O(1)$, $T \uparrow \infty$. В частности, при $H_h \equiv \lambda = \text{const}$ получаем, соответственно,

$$h \sim \left| \ln\left(\frac{2T\nu(\beta)}{\mu a}\right)^{\frac{\lambda b(1-2^{2-\beta})}{a^2}} \right|^{-\frac{1}{\beta}} \quad \text{при } T \uparrow \infty, \quad \mu = O(1).$$

Если же поставить обратную задачу, т. е. как велико должно быть T при $h \downarrow 0$ и $\mu = O(1)$, то из (14) и (15) видно, что

$$T \sim \frac{\mu a}{2\nu(\beta)} h^{1-\beta/2} H_h^{-1/2} \exp\left\{\frac{a^2}{b(1-2^{2-\beta})h^\beta H_h}\right\}, \quad h \downarrow 0, \quad \mu = O(1).$$

Заметим также, что, так как $P\{\eta_a(T) > 0\} \leq E\eta_a(T)$, то (14) является оценкой сверху для вероятности уклонения разности гауссовского процесса ξ_t и аппроксимирующей ее ломаной на величину, по модулю большую a, на промежутке $[0, T]$.

В заключение выражаю искреннюю признательность Ю. К. Беляеву за постановку задачи и ценные указания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Ա. Ե. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

Գաուսյան ստացիոնար պրոցեսի և նրան մոտարկող բեկյալի տարբերության շեղման միջին թվի մասին

Դիցուք ξ_t-ն գաուսյան, ստացիոնար, միջին քառակուսային իմաստով մեկ անգամ դիֆերենցելի պատահական պրոցես է։ Ինչպիսի՞ հավանականությամբ է այդ պրոցեսի մաքսիմալ շեղումը՝ ξ_{kh}, $kh \in [0, T]$, արժեքներում կառուցված բեկյալից, գերազանցում տվյալ u արժեքը։ Հոդվածում ստացված է այդ հավանականության վերին գնահատականն այն պայմանում, երբ մոտարկման քայլը՝ h-ը, ձգտում է զրոյի։ Հնարավոր է դառնում պատկերացում ստանալ այն մասին, թե ինչպես ընտրել մոտարկման քայլը, կամ տվյալ ինտերվալի երկարությունը, որպեսզի պատահական պրոցեսը բեկյալով մոտարկվի անհրաժեշտ ճշտությամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *C. Qualls* and *H. Watanabe*, The Annals of Mathematical Statistics, vol. 43, № 2, 580—596 (1972). [2] *P. H. Мирошин*, Теория вероятн. и ее примен., XVIII, 3, 481—490 1973. [3] *Ю. К. Беляев*, Теория вероятн. и ее примен., XI, 1, 120—128, 1966 [4] *G. Kimeldorf* and *G. Wahba*, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 41, № 2, 495—502 (1970). [5] *Г. Крамер, М. Р. Лидбеттер*, Гауссовские стационарные процессы и их приложения, М., „Мир", 1969. [6] *Ю. К. Беляев*, Теория вероятн. и ее примен., XII, 3, 444—457 (1967).