ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 4

УДК 51.01 : 518.5

МАТЕМАТИКА

Г. Б. Маранджян

Об алгорифмических языках, не допускающих взаимной оптимальной трансляции

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 15/IV 1975)

В теории алгорифмов значительную роль играет теорема Х. Роджерса (1), известная как теорема об изоморфизме универсальных нумераций. К сожалению, техника доказательства этой теоремы не позволяет судить о том, какова величина «избыточности» образа функции по сравнению с прообразом. Основным содержанием данной работы является доказательство того, что для любой пары критериев сложности, удовлетворяющих аксиомам Блюма (2) и любому алгорифмическому языку из весьма широкого класса алгорифмических языков* (включающего универсальные) можно построить второй алгорифмический язык, равнообъемный исходному, таким образом, что никакая трансляция из одного языка в другой с помощью алгорифма, принадлежащего этим языкам, не может сохранять свойство алгорифма быть минимальным (среди эквивалентных) по соответствующей мере.

Уточним основные понятия работы. Не ограничивая общности, изложение будем вести на примере частично-рекурсивных функций (ЧРФ). Дадим то определение понятия «алгорифмический язык», которым мы будем пользоваться (иногда будем писать ради кратности просто «язык»).

Определение 1. Пусть φ—двухместная ЧРФ. Класс функций $\{\lambda x|\varphi(n, x)\}$ будем называть **алгорифмическим языком**, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) содержит все константные функции,

2) замкнут относительно операции суперпозиции.

Будем говорить, что функция φ **определяет** этот язык. Язык, определяемый данной функцией, будем обозначать соответствующей прописной буквой.

Если φ определяет алгорифмический язык Φ, то символом φ_n

* Все понятия, используемые пока на интуитивном уровне, будут уточнены ниже.

будем обозначать функцию $\lambda x|\varphi(n, x)|$ и n будем называть **номером** этой функции в языке Φ. Ясно, что одна и та же функция может иметь более одного номера (в богатых языках обычно бесконечное число номеров).

Определение 2. Общерекурсивную функцию α назовем **транслятором** из языка Φ в язык Ψ, если выполнено следующее условие:

$$\forall n \forall x(\varphi(n, x) \simeq \psi(\alpha(n), x)).$$

Определение 3. Транслятор α из Φ в Ψ назовем **собственным**, если $\alpha \in \Phi \cap \Psi$.

Определение 4. (см ([1])) общерекурсивную функцию s назовем **мерой сложности**, если существует такая ОРФ β, что

$$\forall y(|x|s(x) \leqslant y| = D_{\beta(y)}),$$

где D—каноническая нумерация всех конечных множеств натуральных чисел.

Определение 5. Будем говорить, что номер n s-минимален в языке Φ, если выполнено условие:

$$\forall y(s(y) < s(n) \supset \varphi_y \neq \varphi_n).$$

Теорема. *Каковы бы ни были алгорифмический язык Ψ и меры сложности s_1 и s_2, существует такой алгорифмический язык Ξ, равнообъемный языку Ψ, что не может существовать собственного транслятора α из Ψ в Ξ и (собственного транслятора β из Ξ в Ψ), удовлетворяющего условию*
$\forall n((n$ s_1-минималeн$) \supset (\alpha(n)$ s_2—минимален$))$ (соответственно $(n$ s_2—минимален$) \supset \beta(n)$ s_1—минимален).

Доказательство. Пусть a—номер некоторой константной функции, если язык Ψ содержит только ОРФ и номер пустой функции в противном случае. Будем обозначать через B^i_x множество $|z/s_i(z)=x|$, где $i=1, 2$. Очевидно, что множества B^i_x описываются эффективно. Через $|A|$, где A списковое множество, будем обозначать мощность A.

На первом этапе строим последовательность чисел $e(0), e(1), \ldots$ следующим образом:

$$\begin{cases} e(0) = \mu y(|B^1_y| \neq 0); \\ e(n+1) = \mu y(y > e(n) \,\&\, |B^1_y| \neq 0). \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$E_n = B^1_{e(n)};$$

Через $E_n(k)$, где $1 \leqslant k \leqslant |E_n|$, обозначим k-й по величине (в порядке возрастания) элемент множества E_n.

На втором этапе построения строим конечные последовательности конечных множеств $F(n, k)$ и чисел $f(n, k)$ следующим образом:

$$f(0,1)=\mu t(|B_t^2|\neq 0);$$
$$F(0,1)=B^2_{f(0,1)}.$$

В дальнейшем интервал изменений k зависит от n:

$$1\leq k\leq |E_n|+1;\quad k_n=|E_n|+1.$$

$$f(n+1,1)=\mu t(|\bigcup_{p=f(n,k_n)+1}^{t} B^2_p|>|E_{n+1}|+2);$$

$$f(n+1,q+1)=\mu t(|\bigcup_{p=f(n+1,q)+1}^{t} B^2_p|\geq |E_{n+1}|+2);$$

$$F(n+1,1)=\bigcup_{p=f(n,k_n)+1}^{f(n+1,1)} B^2_p;$$

$$F(n+1,q+1)=\bigcup_{p=f(n+1,q)+1}^{f(n+1,q+1)} B^2_p.$$

Очевидно, что эти последовательности порождаются эффективно.

Введем обозначение

$$g(n,p)=\max x(s_2(x)\geq s_2(y)\ \&\ y\in F(n,p)\ \&\ x\in F(n,p)).$$

Заметим, что

$$s_2(g(n,p))<s_2(g(n,p+1))\quad \text{и}$$

$$s_2(g(n,p))<s_2(g(n+1,r))\quad \text{для всех } p,\ r,\ n.$$

Определим теперь для каждого h и x значение $\xi(h,x)$ следующим образом.

Этап I. Проверяем, выполнено ли условие $h\in F(0,1)$. Если оно выполнено, то полагаем

$$\xi(h,x)\simeq\psi_a(x).$$

Если же это условие не выполнено, (а это проверяется алгорифмически), то переходим к этапу II.

Этап II. Проверяем, существует ли такая пара $\langle n,p\rangle$, что $h=g(n,p)$. Если такие n и p существуют, то полагаем

$$\xi(h,x)\simeq\psi_{E_n(p)}(x).$$

В противном случае переходим к выполнению следующего этапа.

Этап III. Ищем такие n и p, что $h\in F(n,p)$. (очевидно, что $h\neq g(n,p)$). Начинаем одновременно вычислять $\psi_{E_n(p)}(E_n(p))$ и значения $\psi_{E_n(p)}$ на множестве $F(n,p)$.

Если все вычисления завершаются, то рассматриваем множество

$$F(n,p)\setminus\{\psi_{E_n(p)}(E_n(p))\}.$$

Обозначим это множество символом $A(n,p)$. Из построения $F(n,p)$ видно, что $|F(n,p)|\geq|E_n|+2$, следовательно $|A(n,p)|\geq|E_n|+1$. Вычисляем теперь $\psi_{E_n(p)}(z)$ для всех $z\in F(n,p)\setminus\{g(n,p)\}$. Если и эти вычисления завершаются, то рассматриваем полученные значения $\psi_{E_n(p)}(z)$ для указанных z.

Возможны 2 случая:

а) $\psi_{E_n(p)}(z) \in E_n$ для всех указанных z;

б) противоположный случай.

Рассмотрим случай а). Поскольку $|A(n, p)| > |E_n| + 1$, то по крайней мере два элемента z_1 и z_2 имеют один и тот же образ относительно $\psi_{E_n(p)}$; выберем такую пару, чтобы первый элемент был наименьшим, а второй—наименьшим из остальных возможных (такой выбор единственен). Пусть это будет пара $\langle z_1, z_2 \rangle$. Если $h = z_1$, то положим $\xi(h, x) \simeq \psi_{E_n(p)}(x)$, если же $h = z_2$, то положим

$$\xi(h, x) \simeq \psi_{E_n(p)}(x).$$

В случае б) выберем наименьшее из z таких, что $\psi_{E_n(p)}(z) \overline{\in} E_n$; обозначим его через z_3. Если $h = z_3$, то положим

$$\xi(h, x) \simeq \psi_{E_n(p)}(x).$$

Для всех остальных h, принадлежащих $F(n, p)$, для которых ξ еще не задана, положим $\xi(h, x) \simeq \psi_a(x)$.

Заметим, что если необходимые проверки на этапе III не осуществились, то $\xi(h, x)$ окажется неопределенной. Это возможно только в том случае, когда Ψ содержит не общерекурсивные функции и автоматически получим $\xi(h, x) = \psi_a(x)$, в соответствии с выбором a. Если же все вычисления завершаются, то вписывается на месте h в Ξ соответствующая функция $\psi_a(x)$.

На этом построение функции ξ завершается.

Докажем, что ξ—искомая. Из построения ξ легко видеть, что $\Xi \supseteq \Psi$, так как $\psi_{E_n(p)}$ имеет номер $g(n, p)$ в Ξ. Обратное также очевидно: каждому номеру в Ξ поставлена в соответствие некоторая функция из Ψ.

Допустим, что существует собственный транслятор β из Ξ в Ψ, сохраняющий минимальность. Пусть $E_n(p)$ есть некоторый (таких может быть несколько) s_1--минимальный номер функции β. Очевидно, что β—ОРФ.

В силу этого определены все значения

$$\psi_{E_n(p)}(E_n(p)) \quad \text{и} \quad \psi_{E_n(p)}(z) \quad \text{для} \quad z \in F(n, p).$$

Если при этом имеет место случай а) этапа III, то окажется, что $\xi_{z_1} \neq \xi_{z_2}$, но $\beta(z_1) = \beta(z_2)$, в то время как по предположению β—транслятор. Следовательно, случай а) невозможен. Пусть имеет место б). Тогда существует такое $z_3 \in F(n, p)$, что $\beta(z_3) \overline{\in} E_n$. Возможны 2 случая. Либо s_1—сложность $\beta(z_3)$ больше s_1—сложности элементов E_n, либо меньше (так как E_n — множество уровня). Если бы имел место первый случай, то оказалось бы, что β имела бы в языке Ψ номер, сложность которого меньше, чем сложность $E_n(p)$, что невозможно в силу выбора $E_n(p)$, либо $\mathfrak{Z}$—не транслятор. Во втором случае оказалось бы, что номер z_3 не s_2—минимален в Ξ, что также невозможно в силу того, что ни один номер, меньший z_3, не приписан функции $\psi_{E_n(p)}$ при построении. Итак, в каждом из рассмотренных случаев мы приходим к противоречию. Следовательно, такого транслятора $\mathfrak{Z}$ не существует.

Докажем теперь, что невозможен транслятор $\mathfrak{z}$ упомянутого типа из Ψ в Ξ.

В самом деле, s_2—минимальными номерами могут оказаться лишь те, которые не совпадают с некоторым $g(n, p)$. Но в этом случае, согласно построению на этапе III, значение такого транслятора на своем s_1—минимальном номере, скажем $E_n(p)$, не может совпадать ни с z_1, ни с z_2, следовательно будет равно некоторому номеру функции ψ_a, откуда непосредственно вытекает, что $\mathfrak{z}$ не является транслятором. Теорема доказана.

Следствие. *Каковы бы ни были функции сложности s_1, s_2 и универсальная нумерация Ψ, существует такая универсальная нумерация Ξ, что невозможны рекурсивные трансляторы из Ψ в Ξ и из Ξ в Ψ, сохраняющие свойство минимальности.*

Для доказательства достаточно убедиться в универсальности Ξ. Для этого достаточно доказать сводимость Ψ к Ξ. Нетрудно видеть, что для нахождения образа номера n достаточно найти соответствующее число $E_k(p)$ и затем вычислить $g(k, p)$, которое и будет соответствующим номером из Ξ. Технические детали такого построения хотя и громоздки, но очевидны.

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского государственного университета

Հ. Բ. ՄԱՐԱՆՋՅԱՆ

Փոխադարձաբար օպտիմալ տրանսլյացիա չթույլատրող ալգորիթմական լեզուների մասին

Հոդվածում ապացուցված է, որ ինչպիսին էլ լինեն Մ. Բլյումի աքսիոմին բավարարող s_1 և s_2 ժամանակային բարդության ֆունկցիաները և սեղմման գործողության նկատմամբ փակ, հաստատուններ պարունակող Φ ալգորիթմական լեզուն, գոյություն ունի Φ-ին նույնածավալ այնպիսի Ψ ալգորիթմական լեզու, որ հնարավոր չէ օպտիմալ (ըստ համապատասխանաբար s_1 և s_2 ժամանակային հայտանիշների) տրանսլյացիա Φ-ից Ψ, ինչպես նաև Ψ-ից Φ: Այդ արդյունքը տարածվում է նաև ունիվերսալ ալգորիթմական լեզուների դեպքի վրա, չնայած այն հանգամանքին, որ այդ լեզուների համար ուժի ունի Հ. Ռոջերսի ունիվերսալ ալգորիթմական լեզուների իզոմորֆիզմի մասին հանրահայտ թեորեմը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. Rogers*, The Journal of Symbolic Logic, 23, № 3, 331–341 (1958).
[2] *M. Blum*, On the size of machines, Information and Control, 11, №3, 257—265(1967)