ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXI 1975 3

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

С. Г. Овсепян

О структуре на множестве полурегулярных H-замкнутых расширений топологических пространств

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 16/VI 1975)

Все топологические пространства, о которых будет идти речь, предполагаются хаусдорфовыми.

В работе (1) доказывается, что для любого вполне регулярного пространства X множество $K(X)$ всех бикомпактных расширений пространства X с обычным отношением порядка образует полурешетку сверху, а в случае локально бикомпактного вполне регулярного пространства—полную решетку.

В работе (2) описаны все полурегулярные H-замкнутые расширения произвольного полурегулярного пространства X, путем установления взаимно однозначного соответствия между множеством H-структур на X и множеством полурегулярных H-замкнутых расширений пространства X.

В (3) построены все хаусдорфовы и все H-замкнутые расширения произвольного топологического пространства. В частности, для полурегулярных пространств построены все неуплотняемые расширения.

В настоящей заметке приводится схема построения всех неуплотняемых расширений произвольного полурегулярного пространства X.

В множестве $\bar{K}(X)$ всех неуплотняемых расширений пространства X вводится отношение частичного упорядочения и показывается, что $\bar{K}(X)$ с этим отношением порядка образует полурешетку сверху, оно образует полную решетку тогда и только тогда, когда X к тому же локально H-замкнуто.

Заметим, что метод построения множества $K(X)$ и исследования его структуры, данный в (1), не применим в случае полурегулярного пространства X, ни для построения неуплотняемых расширений, ни для исследования структуры множества $\bar{K}(X)$.

Напомним некоторые, необходимые для дальнейшего, определения, касающиеся псевдотопологических пространств (3–5).

Открытый фильтр топологического пространства (X, V), или, что то же самое, фильтр псевдотопологии V называется полурегулярным, если он обладает базой, состоящей из канонически открытых множеств. Так как для любого открытого фильтра φ пространства (X, V) семейство канонически открытых множеств, входящих в φ, образует базу открытого фильтра, то каждому открытому фильтру φ можно сопоставить полурегулярный открытый фильтр φ_* с базой, состоящей из всех канонически открытых множеств, принадлежащих φ. Естественно φ_* называть полурегулярным открытым фильтром ассоциированным с φ. В связи с этим, если Φ некоторая система открытых фильтров пространства (X, V) систему $\Phi_* = \{\varphi_*;\ \varphi \in \Phi\}$ будем называть системой полурегулярных открытых фильтров ассоциированной с Φ.

Множество Φ открытых фильтров пространства (X, V) называется бикомпактным, если для каждого семейства $\{v_\alpha\}$ открытых множеств, обладающего тем свойством, что для любого $\varphi \in \Phi$ существует $v \in \{v_\alpha\}$ такое, что $v \in \varphi$, найдется конечное подсемейство с таким же свойством.

Пусть U множество всех открытых ультрафильтров пространства (X, V), не имеющих точек прикосновения, а D некоторое разбиение множества U на бикомпактные подмножества. Рассмотрим систему открытых фильтров $\Phi(D) = \{\varphi_d;\ d \in D\}$, где $\varphi_d = \bigcap\{u;\ u \in d\}$ и пусть $\Phi_*(D)$ система открытых полурегулярных фильтров, ассоциированная с $\Phi(D)$.

Каждой точке x пространства (X, V) сопоставим систему V_x ее открытых окрестностей и пусть $X_0 = \{V_x;\ x \in X\}$.

Каждый элемент множества $X_0 \cup \Phi_*(D)$ представляет собой фильтр псевдотопологии V, следовательно, пара $\{X_0 \cup \Phi_*(D), V\}$ представляет собой псевдотопологическое пространство. Как и в ([3]), ему сопоставим топологическое пространство $(X_0 \cup \Phi_*(D), W) = F\{X_0 \cup \Phi_*(D), V\}$, где W топология на множестве $X_0 \cup \Phi_*(D)$ с базой, образованной подмножествами вида $S_v = \{\varphi;\ \varphi \in X_0 \cup \Phi_*(D);\ v \in \varphi\}$, когда v пробегает все V.

Пусть i — отображение пространства (X, V) в пространство $(X_0 \cup \Phi_*(D), W)$, порожденное соответствием $x \to V_x$.

Теорема 1. *Пусть (X, V) полурегулярное и не H-замкнутое пространство, тогда для любого разбиения D множества U всех открытых ультрафильтров пространства (X, V), не имеющих точек прикосновения, на бикомпактные подмножества, пара $\{(X_0 \cup \Phi_*(D), W);\ i\}$ представляет собой неуплотняемое расширение пространства (X, V). Обратно, каждое неуплотняемое расширение пространства (X, V) эквивалентно расширению, заданному парой $\{(X_0 \cup \Phi_*(D), W);\ i\}$ при некотором разбиении D множества U на бикомпактные подмножества.*

Так как для не H-замкнутого пространства множество U не пусто, то из этой теоремы сразу следует, что каждое полурегулярное и не H-замкнутое пространство допускает неуплотняемое расширение.

Пусть $\bar{K}(X)$ множество, построенных указанным выше способом, всех неуплотняемых расширений полурегулярного пространства X, когда D пробегает всевозможные разбиения множества U на бикомпактные подмножества. Согласно теореме 1 $\bar{K}(X)$ представляет собой, с точностью до эквивалентности расширений, всю совокупность неуплотняемых расширений пространства X.

Отождествляя пространство (X, V) с его гомеоморфным образом X_0 при отображении i, мы можем в дальнейшем во всех расширениях из $\bar{K}(X)$ опускать гомеоморфизм i и под расширением вместо пары понимать только соответствующее топологическое пространство.

В множестве $\bar{K}(X)$ введем отношение $>$ частичного упорядочения следующим образом: $X_1 > X_2$ тогда и только тогда, когда существует θ-непрерывное отображение пространства X_1 на X_2 тождественное на X_0.

Предложение 1. Пусть X_1 и X_2 неуплотняемые расширения полурегулярного пространства X, тогда может существовать только одно θ-непрерывное отображение пространства X_1 на X_2, тождественное на X_0.

Предложение 2. Пусть X полурегулярное пространство и $X_1, X_2 \in \bar{K}(X)$, тогда из $X_1 > X_2$ и $X_2 > X_1$ следует, что $X_1 = X_2$.

Предложение 3. Пусть X полурегулярное пространство, тогда $\bar{K}(X)$ с отношением $>$ обладает единственным наибольшим элементом.

Предложение 4. Для любого полурегулярного пространства X частично упорядоченное множество $\bar{K}(X)$ полно.

Предложение 5. Пусть X полурегулярное пространство. Множество $\bar{K}(X)$ с отношением $>$ обладает наименьшим элементом тогда и только тогда, когда пространство X локально H-замкнуто и не H-замкнуто.

Сопоставляя предыдущие предложения, непосредственно приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Множество всех неуплотняемых расширений произвольного полурегулярного и не H-замкнутого пространства X с отношением $>$ образует полурешетку сверху, оно образует полную решетку тогда и только тогда, когда пространство X к тому же локально H-замкнуто.*

В заключение отметим также, что если исходное пространство вполне регулярно, локально бикомпактно и небикомпактно, то как это непосредственно следует из наших построений, его наименьшее неуплотняемое расширение совпадает с его одноточечной бикомпактификацией

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Գ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

Տոպոլոգիական տարածությունների կիսառեգուլյար H—փակ ընդլայնումների բազմության կառուցվածքի մասին

Հոդվածում տրվում է կիսառեգուլյար Հաուսդորֆյան տոպոլոգիական տարածության բոլոր կիսառեգուլյար H—փակ ընդլայնումները կառուցելու եղանակ։ Այդպիսի ընդլայնումների բազմության մեջ մտցվում է մասնակի կարգավորվածության հարաբերություն և ցույց է տրվում, որ կամայական կիսառեգուլյար Հաուսդորֆյան X տարածության բոլոր կիսառեգուլյար H—փակ ընդլայնումների բազմությունն այդպիսի հարաբերությամբ կազմում է կիսաստրուկտուրա վերևից, այն կազմում է լրիվ ստրուկտուրա այն, և միայն այն դեպքում, երբ X-ը H—փակ չէ և լոկալ H—փակ է։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *N. Boboc et Gh. Siretchi*, Bull. Math. Soc. Sci Math. Phys. R. P. Roumaine (N. S.) 5, (53), nr. 3—4 (1961). [2] *В. В. Федорчук*, ДАН СССР, 210, № 6 (1973). [3] *С. Г. Овсепян*, ДАН СССР, 224, № 4 (1975). [4] *С. Г. Овсепян*, ДАН СССР, 206, №4 (1972). [5] *С. Г. Овсепян*, „Известия АН Армянской ССР“, Математика, т. VIII, № 3 (1973)