

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Р. А. Багян

Квазиполиномы типа Бернштейна—Хаусдорфа, ассоциированные с функциями типа Миттаг—Леффлера и $\langle \rho, \mu \rangle$ — проблема моментов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 6/VI 1975)

Целые функции типа Миттаг—Леффлера

$$E_{\rho}(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)}, \quad (0 < \rho < +\infty, -\infty < \mu < +\infty) \quad (1)$$

нашли уже важные применения во многих задачах анализа (^{1,2}).

Настоящая заметка посвящена еще одному применению этих функций, а именно, построению ассоциированных с ними квазиполиномов типа Бернштейна—Хаусдорфа, а также некоторым обобщениям проблемы моментов Ф. Хаусдорфа.

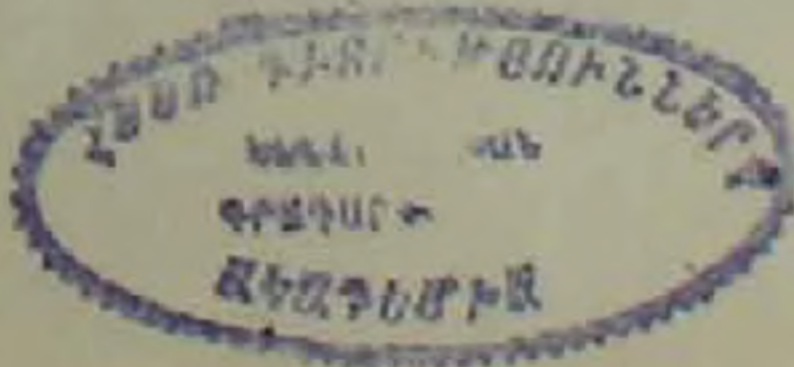
В статье (³) было доказано, что функция $E_{\rho}(-x, \mu)$ на полуоси $[0, +\infty)$ вполне монотонна для значений параметров $1 \leq \rho < +\infty$, $\frac{1}{\rho} \leq \mu < +\infty$. При этом было установлено, что на всей плоскости $s = \sigma + it$ справедливо интегральное представление

$$E_{\rho}(s, \mu) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{st} \Phi_{\rho, \mu}(t) dt, & \text{при } 1 < \rho < \infty, \frac{1}{\rho} \leq \mu < +\infty \\ \int_0^{\infty} e^{st} d\alpha_{\rho}(t) & \text{при } \rho = 1, 1 \leq \mu < +\infty, \end{cases} \quad (2)$$

где $\Phi_{\rho, \mu}(s)$ целая функция порядка $\frac{\rho}{\rho-1}$ и типа $\sigma = (1-\rho^{-1})\rho^{-\frac{1}{\rho-1}}$ обладающая свойствами

$$\Phi_{\rho, \mu}(t) \geq 0, \quad t \in [0, +\infty), \quad \Phi_{\rho, \mu}(t) \in L(0, +\infty)$$

$$\alpha_{\rho}(t) = \begin{cases} \frac{1-(1-t)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\Gamma(\mu)}, & 1 < t < +\infty \end{cases} \quad (3)$$



1°. Для любого $\varepsilon (0 < \varepsilon < +\infty)$ и $\beta (0 < \beta < \pi)$ обозначим через $\gamma(\varepsilon, \beta)$ бесконечный контур в плоскости z , пробегаемый в направлении неубывания $\arg z$ и состоящий из лучей $\arg z = \pm \beta$ ($z \leq \varepsilon$) и дуги $l(\varepsilon, \beta) (-\beta \leq \arg z \leq \beta)$ окружности $|z| = \varepsilon$, соединяющей концы $\pm \varepsilon e^{i\beta}$ этих лучей.

Пусть $\{\lambda_j\}_0^\infty$ — произвольная, неубывающая последовательность положительных чисел. Для любого $n \geq 0$ и $0 \leq k \leq n$ обозначим через $s_{k,j}$ кратность появления числа λ_j на отрезке $[\lambda_k, \dots, \lambda_n]$, заметив при этом, что $s_{1,j} \leq s_{2,j} \leq \dots$ и приняв $s_0 = 1$. Обозначим далее через $\rho_{k,j}(n)$ кратность появления λ_j на отрезке $[\lambda_k, \dots, \lambda_n]$ и положив $\rho_{k,j}(n) = \rho_j(n)$.

Для любого $n (0 \leq n < +\infty)$ введем в рассмотрение систему функций

$$\begin{aligned} \omega_{n,k}^{(p,q)}(x) &\equiv \left| \Gamma(p) \prod_{j=k+1}^n \lambda_j \right| x^{(1-p)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \beta)} \frac{e^{x\lambda_j^{1-p}}}{\prod_{j=k}^n (\lambda_j + \lambda_j)} dz = \\ &= \left| \Gamma(p) \prod_{j=k+1}^n \lambda_j \right| \sum_{j=k}^n c_{k,j}^{(n)} E_p^{(s_{k,j})}(-\lambda_j x, p) x^{(1-p)} \lambda_j^{-1}, \quad (0 \leq k \leq n, n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$c_{k,j}^{(n)} = \frac{1}{\Gamma(s_{k,j}) \Gamma(\rho_{k,j}(n) - s_{k,j} + 1)} \cdot \frac{d^{\rho_{k,j}(n) - s_{k,j}}}{d\lambda_j^{\rho_{k,j}(n) - s_{k,j}}} \left| \prod_{\substack{j=k \\ \lambda_j \neq \lambda_j}}^n (\lambda_j + \lambda_j)^{-1} \right|_{\lambda_j = \lambda_j} \quad (5)$$

Заметим, что в случае возрастающей последовательности $\{\lambda_j\}_0^\infty$ $s_{k,j} = \rho_{k,j}(n) = 1$ ($0 \leq k \leq j \leq n$) и из (5) будем иметь

$$c_{k,j}^{(n)} = \frac{1}{\prod_{\substack{j=k \\ \lambda_j \neq \lambda_j}}^n (\lambda_j - \lambda_j)} \quad (5')$$

Важнейшие свойства системы функций (4) содержатся в следующих леммах.

Лемма 1. а) Пусть $1 \leq p < +\infty$ и $\frac{1}{p} \leq q < +\infty$, тогда функции $\{\omega_{n,k}^{(p,q)}(x)\}$ непрерывны и неотрицательны на замкнутой полуоси $[0, +\infty]$. При $\lambda_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^n \omega_{n,k}^{(p,q)}(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq +\infty, \quad 0 \leq n < +\infty \quad (6)$$

причем

$$0 \leq \omega_{n,k}^{(p,q)}(x) \leq 1, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (6')$$

б) Система функций (4) связана с системой $\{\omega_{n,k}(x) \equiv \omega_{n,k}^{(1,1)}(x)\}$ следующими равенствами

$$\omega_{n,k}^{(p)}(x) = \Gamma(p) \int_0^x \omega_{n,k}(xt) \Phi_{n,k}(t) dt, \quad 0 \leq k \leq n, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Лемма 2. Для любого n ($1 \leq n < +\infty$) и $\lambda \in (0, +\infty)$

$$E_p(-\lambda, x, \mu) = \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{1}{\Gamma(p)} \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j} \right) \right\} \omega_{n,k}^{(p)}(x) + R_n^{(p)}(x, \lambda), \quad (8)$$

где

$$R_n^{(p)}(x, \lambda) = x^{(1-p)} \left\{ \prod_{j=1}^n (\lambda_j - \lambda) \right\} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\lambda, 1)} \frac{e^{x\zeta} \zeta^{p-1} d\zeta}{(\zeta + \lambda) \prod_{j=1}^n (\zeta + \lambda_j)} \quad (9)$$

Устанавливается, что

$$r_n(x, \lambda) \equiv R_n^{(1)}(x, \lambda) = P_n(\lambda) \cdot Q_n(x, \lambda),$$

где

$$P_n(\lambda) = -\lambda \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j} \right),$$

$$Q_n(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\lambda, 1/2)} \frac{e^{x\zeta}}{\zeta(\zeta + \lambda) \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{\zeta}{\lambda_j} \right)} d\zeta, \quad x \in (0, +\infty)$$

При этом справедлива

Лемма 3. При любых $0 < r < R < +\infty$ и $\delta > 0$ имеют место оценки

$$\max_{r \leq \lambda \leq R} |P_n^{(p)}(\lambda)| \leq C_p(r, R) \exp \left\{ -\frac{r}{4} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \right\}, \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

и

$n \geq 1$

$$\max_{0 \leq x < +\infty} |Q_n^{(p)}(x, \lambda)| \leq C_p^*(\delta, r, R) \exp \left\{ \delta \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \right\} + \frac{1}{\lambda^{p+1}}, \quad r \leq \lambda \leq R, \quad (11)$$

где $C_p(r, R)$ и $C_p^*(\delta, r, R)$ — постоянные, не зависящие от n .

2°. Повсюду в дальнейшем предполагается, что неубывающая последовательность $\{\lambda_j\}_0^\infty$ удовлетворяет условиям

$$\lambda_0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty. \quad (12)$$

Далее, для любой функции $f(x) \in C[0, +\infty]$, т. е. непрерывной на полуоси $[0, +\infty]$ под ее нормой $\|f\|_\infty$ будем понимать число $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, +\infty]} |f(x)|$.

На основании (8) и (9) при $p = \mu = 1$ и свойства (10), (11) леммы 2 устанавливается следующая

Теорема 1. Пусть последовательность $\{\lambda_n\}_0^\infty$ удовлетворяет условиям (12). Тогда для всех λ ($0 < \lambda < +\infty$), притом равномерно в любом промежутке $r \leq \lambda \leq R$ ($0 < r < R < +\infty$) будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| e^{-\lambda x} x^p - \sum_{k=0}^n a_{k,n}^{(p)}(\lambda) \omega_{n,k}(x) \|_{\infty} = 0, \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

где

$$a_{k,n}^{(p)}(\lambda) = (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \left\{ \prod_{j=k+1}^n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j} \right) \right\}. \quad (13')$$

Следствие. При $p=0$ и $\lambda \in [0, +\infty)$ ввиду (6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| e^{-\lambda x} - \sum_{k=0}^n \left\{ \prod_{j=k+1}^n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j} \right) \right\} \omega_{n,k}(x) \|_{\infty} = 0, \quad x \in [0, +\infty).$$

Далее доказывается

Теорема 2. Если последовательность $\{\lambda_n\}_0^{\infty}$ удовлетворяет условиям (12), то для произвольной непрерывной на $[0, \infty]$ функции $f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| f(x) - \sum_{k=0}^n f(\sigma_{n,k}) \omega_{n,k}(x) \|_{\infty} = 0,$$

где

$$\sigma_{n,k} = \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{\lambda_j}.$$

Из теоремы 2 в качестве простого следствия вытекают как при $0 < \lambda < \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| e^{-\lambda x} x^p - \sum_{k=0}^n e^{-\lambda \sigma_{n,k}} \sigma_{n,k}^p \omega_{n,k}(x) \|_{\infty} = 0, \quad x \in [0, +\infty) \quad (14)$$

так и с помощью теоремы 1

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \| \sum_{k=0}^n e^{-\lambda \sigma_{n,k}} \sigma_{n,k}^p \omega_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^p \frac{d^p}{d\lambda^p} \left\{ \prod_{j=k+1}^n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j} \right) \right\} \omega_{n,k}(x) \|_{\infty} = \\ = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

для любого $p=0, 1, 2, \dots$

По поводу теоремы 2 отметим, что в случае возрастающей последовательности $\{\lambda_n\}_0^{\infty}$ методом, отличным от приведенного здесь, она впервые была установлена Хаусдорфом (см. (4), стр. 288—291)*).

Из теоремы 2 и леммы 1 следует

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при $\lambda \in [0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| E_p(-\lambda x, \mu) - \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^n e^{-\lambda \sigma_{n,k}} \omega_{n,k}(x) \|_{\infty} = 0$$

Обозначим через $F_{p,\lambda}[f]$ множество функций $F(x)$, представимых в виде

*). Значительно позже, в 1949 году, результат Ф. Хаусдорфа был повторен Хиршманом и Уилдером (см. (6), а также (7)).

$$F(x) = \Gamma(\mu) \int_0^{\infty} f(xt) \Phi_{\mu, \mu}(t) dt, \quad (1 < \mu < +\infty, \frac{1}{\mu} \leq \mu < +\infty),$$

где $f(x) \in C[0, +\infty]$.

Для данной функции $F(x) \in F_{\mu, \mu}[f]$ под квазиполиномом типа Бернштейна—Хаусдорфа будем понимать выражение

$$B_n^{(\mu, \mu)}[F(x)] = \sum_{k=0}^n f(\sigma_{n,k}) \omega_{n,k}^{(\mu, \mu)}(x), \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (16)$$

Используя теорему 2 и лемму 1, устанавливается, наконец, следующая более общая

Теорема 4. Если функция $F(x) \in F_{\mu, \mu}[f]$, то последовательность квазиполиномов $B_n^{(\mu, \mu)}[F(x)]$ равномерно сходится к $F(x)$ на $[0, +\infty]$.

3°. Приступим теперь к обобщениям проблемы моментов Хаусдорфа. Последовательность чисел $\{\mu_n\}_0^\infty$ будем называть моментной, если существует функция $\alpha(x)$ ограниченной вариации на $[0, +\infty]$ такая, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda_n x} x^{n-1} d\alpha(x) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

В случае, когда последовательность $\{\lambda_n\}$ возрастающая, т. е. $s_j = p_j(n) \equiv 1$, заменой переменного интегрирования $e^{-x} = t$, положив $-\alpha(-\ln t) = g(t)$, мы приходим к проблеме моментов Хаусдорфа

$$\int_0^1 t^{\lambda_n} dg(t) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

первоначально поставленной и решенной в его работе, как в случае $\lambda_n = n$ ($n \geq 0$) (см. (4), стр. 74—109 и (6), стр. 439—443), так и в случае произвольной последовательности $\{\lambda_n\}$ (см. (4), стр. 280—299 и (5), стр. 104—105).

Введем в рассмотрение величины

$$\omega_{n,k} = \prod_{j=k+1}^n \lambda_j \sum_{i=k}^n c_{k,i}^{(n)} \mu_i, \quad (18)$$

где $c_{k,i}^{(n)}$ определяются из формул (5), заметив при этом, что в случае возрастающей последовательности $\{\lambda_n\}_0^\infty$ в силу (5') они совпадают с величинами

$$\omega_{n,k} = \prod_{j=k+1}^n \lambda_j \sum_{i=k}^n \frac{\mu_i}{\prod_{s=j}^n (\lambda_s - \lambda_j)} \quad (18')$$

введенными Хаусдорфом (см. (4), стр. 280—281 и (5), стр. 104).

Существенно опираясь на теорему 1, а также на соотношения (14) и (15) для $p = s_n - 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) доказывается

Теорема 5. Для существования решения проблемы моментов (17) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{k=0}^n |\omega_{n,k}| < C, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

где C — независимая от n постоянная.

Следующее определение является обобщением известного определения Хаусдорфа (см. (4), стр. 282—283 и (5), стр. 104) на случай неубывающей последовательности $\{\lambda_n\}_0^\infty$.

Определение 1. Последовательность $\{\mu_n\}_0^\infty$ называется вполне монотонной относительно $\{\lambda_n\}_0^\infty$, если

$$\Delta^n \mu_k \equiv \prod_{j=1}^n \lambda_{k+j} \sum_{j=0}^n c_{k+j}^{(n)} \mu_{k+j} \geq 0, \quad 0 \leq k \leq n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

где

$$c_{k+j}^{(n)} = \frac{1}{\Gamma(s_{k+j})\Gamma(p_{k+j}(n) - s_{k+j} + 1)} \frac{d^{p_{k+j}(n) - s_{k+j}}}{dx^{p_{k+j}(n) - s_{k+j}}} \left\{ \prod_{l=0}^n (\lambda_l + \lambda_{k+j})^{-1} \right\} \Big|_{x = -\lambda_{k+j}} \quad (21)$$

Справедлива также следующая

Теорема 6. Для того, чтобы последовательность $\{\mu_k\}_0^\infty$ была моментной относительно неубывающей и ограниченной на $[0, +\infty]$ функции, необходимо и достаточно выполнение (20)

Отметим, что теоремы 5 и 6 в случае возрастающей последовательности $\{\lambda_n\}_0^\infty$ были установлены Хаусдорфом (см. (4), стр. 287—297), им же впервые было отмечено (см. (4), стр. 297) на возможность перенесения его результатов на случай произвольной неубывающей последовательности $\{\lambda_n\}_0^\infty$.

4°. Проблема моментов (17) допускает дальнейшее обобщение. Пусть $\{\mu_n(t)\}_0^\infty \in C[0, +\infty]$, причем $\mu_0(t) \equiv \mu_0 = \text{const}$. Для данных $\rho > 1$ и $\mu \geq \frac{1}{\rho}$ введем в рассмотрение последовательность чисел

$$\mu_n(\rho, \mu) = \int_0^\infty \mu_n(t) \Phi_{\rho, \mu}(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Последовательность $\{\mu_n(\rho, \mu)\}_0^\infty$ будем называть $\langle \rho, \mu \rangle$ — моментной, если существует функция $\beta(x)$ ограниченной вариации на $[0, +\infty]$ такая, что

$$\mu_n(\rho, \mu) = \int_0^\infty E_{\rho, \mu}^{(n-1)}(-\lambda_n x, \mu) x^{\rho-1} d\beta(x), \quad n = 0, 1, 2, \quad (23)$$

Введем в рассмотрение моментный оператор M :

$$M[e^{-i\pi x'}(xt)^{i\pi-1}] = \mu_m(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

и системы функций

$$\Omega_{n,k}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=k+1}^n \lambda_j \sum_{j=0}^n c_{k+j}^{(n)} \mu_j(t), \quad 0 \leq k \leq n, \quad n = 0, 1, 2, \quad (24)$$

Определение 2. Функциональная последовательность $\{\mu_n(t)\}_0^\infty$ называется вполне монотонной, если

$$\Delta^n \mu_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^n \lambda_{k+j} \sum_{j=0}^n c_{k+j}^{(n)} \mu_{k+j}(t) \geq 0, \quad 0 \leq k \leq n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

где $c_{k+j}^{(n)}$ определяются из формул (21).

Признаки $\langle \rho, \mu \rangle$ — моментности содержатся в следующих двух теоремах.

Теорема 7. Для разрешимости $\langle \rho, \mu \rangle$ — проблемы моментов (22) — (23) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^n |\Omega_{n,k}(t)| < C, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

где $\Omega_{n,k}(t)$ определяются из формул (24), а C — независимая от n постоянная.

Теорема 8. Для существования решения $\langle \rho, \mu \rangle$ — проблемы моментов в классе неубывающих и ограниченных на $[0, +\infty]$ функций, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta^n \mu_k(t) = \prod_{j=1}^n \lambda_{k+j} \sum_{j=0}^n c_{k+j}^{(n)} \mu_{k+j}(t) \geq 0, \quad 0 \leq k \leq n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Нетрудно видеть, что теоремы 7 и 8 в крайнем случае, когда $\rho = \mu = 1$ в силу (3) переходят соответственно в теоремы 5 и 6.

В заключении автор выражает искреннюю благодарность М. М. Джрбашяну как за постановку задач, так и многократные обсуждения.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

ՈՒՍՈՒՄՆԵՐ

Սիստեմա-լեֆֆերի տիպի ֆունկցիաների հետ ասոցիացված Բերնշտեյն-Հաուսդորֆի տիպի բնագիտությունները և $\langle \rho, \mu \rangle$ մոմենտների պրոբլեմը

Ներկա հոդվածը նվիրված է Սիստեմա-լեֆֆերի տիպի $E_2(z, \mu)$ ֆունկցիաների ևս մի կիրառություն: Այստեղ $[0, +\infty]$ կիսաառանցների համար կառուցվում են այդ ֆունկցիաների հետ ասոցիացված Բերնշտեյն-Հաուսդորֆի տիպի բնագիտությունները և ցույց է տրվում նրանց հավասարաչափ գույքամիտությունն անընդհատ ֆունկցիաների որոշակի ենթադասերում:

Հնդհանրացվում են նաև Զ. Հաուսդորֆի հայտնի թևորեմները մոմենտների պրոբլեմի վերաբերյալ ընվազող հաջորդականության դեպքում և դիտարկվում է նոր $\langle \sigma, \mu \rangle$ մոմենտների պրոբլեմը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», 1—675, М., 1966.
- ² М. М. Джрбашян, Б. А. Саакян, «Известия АН СССР», сер. матем., т. 39, № 1, 69—122 (1975).
- ³ М. М. Джрбашян, Р. А. Багцян, ДАН СССР, т. 223, № 6 (1975).
- ⁴ F. Hausdorff, Summationsmethoden und Momentfolgen, Math. Zeitschrift 9(1921) 1, 74—109, II, 280—299.
- ⁵ J. A. Shohat and Tamarkin, The problem of moments, Publ. Amer. Mat Soc., New York (1943).
- ⁶ I. I. Hirschman and D. V. Widder, Duke Math. J. vol, 16, №3, 433—437 (1949).
- ⁷ И. И. Хиршман и Д. В. Уиддер, Преобразования типа свертки, И. Л., М., 1958.
- ⁸ И. П. Натансон. Конструктивная теория функций, ГИТЛ, М., 1949.