ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 2

УДК 539.3

МЕХАНИКА

М. В. Белубекян

О некоторых особенностях задач магнито-упругости токонесущих пластин

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 12/V 1975)

Взаимодействие поля упругих перемещений и электромагнитного поля приводит к появлению новых членов в уравнении движения пластинки. Некоторые из них не имеют механических аналогий.

В настоящей работе, на примере одной задачи магнитоупругости, выясняется характер изменения задачи с появлением указанных новых членов.

1. Рассматривается упругая пластинка—полоса шириной l и постоянной толщиной $2h$. Упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются жесткостью D, плотностью ρ, электропроводностью σ. Магнитная и диэлектрическая проницаемости материала пластинки принимаются равными единице.

В прямоугольной декартовой системе координат пластинка занимает область $(0<x<l,\ -\infty<y<\infty,\ -h\leq z\leq h)$ и служит проводником электрического тока постоянной плотности j_0 по направлению оси ox.

Магнитное поле в пластинке, создаваемое электрическим током принимается в виде

$$H_{0x}=0,\quad H_{0y}=-\frac{4\pi}{c}j_0z,\quad H_{0z}=0, \tag{1.1}$$

что соответствует решению соответствующей задачи магнитостатики в случае бесконечной пластинки.

Колебания такой пластинки приводят к изменению электромагнитного поля. При этом возникают силы электромагнитного происхождения, действующие на пластинку. Задача определения поля упругих перемещений и возбужденного электромагнитного поля оказывается взаимосвязной.

Для исследования указанной задачи, наряду с гипотезами Кирхгофа принимаются гипотезы магнитоупругости, которые предполагают, что нормальная компонента возбужденного магнитного поля и тангенциальные компоненты возбужденного электрического поля не изменяются по толщине пластинки ([1,2]).

На основе гипотез магнитоупругости в работе ([3]) были получены общие уравнения магнитоупругости токонесущих пластин.

Согласно ([3]), уравнение движения пластинки для рассматриваемой задачи при предположении, что колебания зависят только от координат x, приводится к виду.

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{h}{c}j_0(h_y^+ + h_y^-)+\frac{h}{4\pi\sigma}j_0\frac{\partial}{\partial x}(e_z^+ + e_z^-)+$$

$$+\frac{h^3}{3c}j_0\left|1-\frac{3c^2}{(4\pi\sigma h)^2}\right|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(h_y^+ + h_y^-)+\frac{2h^3\sigma}{15c^2}\left(\frac{4\pi}{c}j_0\right)^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t} \tag{1.2}$$

Здесь w — прогиб пластинки, c — скорость света в вакууме, h_x^+, h_y^-, e_z^+, e_z^- — значения компонент возбужденного магнитного поля h_y и возбужденного электрического поля e_z на соответствующих поверхностях пластинки $z=h$ и $z=-h$.

Уравнение (1.2) содержит, кроме функции w, неизвестные величины h_y^+, h_y^-, e_z^+, e_z^-.

В общем случае зависимость уравнения, определяющего прогибы пластинки, от компонент возбужденного электромагнитного поля более сложная и поэтому необходимо рассмогрение уравнений, определяющих компоненты электромагнитного поля ([3]).

В рассматриваемом случае для замыкания уравнения (1.2) достаточно использование симметричности возбужденного магнитного поля и условия равенства нулю нормальной к поверхности пластинки составляющей плотности электрического тока.

Из условий задачи следует, что $h_x=0$, $e_y=0$. Так как гипотезы магнитоупругости предполагают неизменность компоненты e_x электрического поля по толщине пластинки, то для компонент h_y магнитного поля, обусловленного током проводимости σe_x, выполняется условие симметрии $h_y(h)=-h_y(-h)$, т. е. $h_y^+ + h_y^- = 0$. Этот результат получается также из приближенных соотношений для определения величин h_y^+ и h_y^-, предложенных в работе ([4])

Из условия равенства нулю нормальной к деформированной поверхности пластинки составляющей плотности электрического тока ([4]), с учетом (1.1), получается

$$e_z^+ + e_z^- = \frac{j_0}{\sigma}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{4\pi h^2}{c^2}j_0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}.$$

С учетом вышесказанного уравнение (1.2) приводится к следующему виду, не содержащему других неизвестных величин, кроме функции прогиба $w(x, t)$.

$$a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \delta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \qquad (1.3)$$

где

$$a^2 = \frac{D}{2\rho h}, \quad b^2 = \frac{j_0^2}{4\pi\rho\sigma^2}, \quad \delta = \frac{h^4\sigma}{15\rho c^2}\left(\frac{4\pi}{c} j_0\right)^2, \quad \delta = \delta_1 \left[1 - \frac{15c^2}{(4\pi\sigma h)^2}\right].$$

Для реальных хорошо проводящих пластин, толщина которых больше межмолекулярных расстояний,

$$\sqrt{15}\, c/(4\pi\sigma h) \ll 1 \quad \text{и} \quad \delta_1 \approx \delta > 0.$$

2. Таким образом, задача колебаний токонесущей пластинки приводится к решению уравнения (1.3) с однородными граничными условиями на краях пластинки ($x=0$, $x=l$) и с произвольными начальными условиями

$$w(x,\ 0) = \varphi(x), \quad \partial w(x,\ 0)/\partial t = \psi(x). \qquad (2.1)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (1.3) и к однородным граничным условиям, получим следующее уравнение относительно изображений по Лапласу

$$a^2 \tilde{w}^{IV} - b^2 \tilde{w}^{II} + s\delta \tilde{w}^{II} + s^2 \tilde{w} = \psi + s\varphi - \delta\varphi^{II} \qquad (2.2)$$

с однородными граничными условиями относительно функции $\tilde{w}(x,s)$.

Рассматривая однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.2), получим задачу на определение собственных значений и собственных функций. Очевидно, что указанная задача не всегда будет самосопряженной. В частности, легко показывается, что при одном заделанном и другом свободном краях задача несамосопряженна, в то время как для пластин, края которых либо шарнирно-опертые, либо заделанные,—задача самосопряженна.

Для указанных самосопряженных краевых задач получается условие

$$(s_1 + s_2) \int_0^l \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 dx = -\delta \int_0^l \tilde{w}_1' \tilde{w}_2' dx, \qquad (2.3)$$

где s_1, s_2—различные собственные значения, $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$—соответствующие им собственные функции.

Условие (2.3) показывает, что в общем случае система собственных функций самосопряженной краевой задачи не является ортогональным вследствие наличия в уравнении (1.3) члена со смешанной производной.

В частном случае, когда края пластинки шарнирно-опертые

$$w(0,\ t) = w(l,\ t) = 0, \quad w''(0,\ t) = w''(l,\ t) = 0 \qquad (2.4)$$

собственные значения и собственные функции находятся в виде

$$s_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left[-\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - a^2 - \left(\frac{bl}{n\pi}\right)^2}\right], \quad \bar{w}_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad (n = 1, 2 \ldots) \tag{2.5}$$

Легко показать, что собственные функции ортогональны, а также удовлетворяют условию (1.6).

В случае, когда $\delta < 2a$, общее решение уравнения (1.3), удовлетворяющее граничным условиям (2.4), имеет вид

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{\delta t}{2}\right] \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{a^2 + \left(\frac{bl}{n\pi}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4}}\, t + \right.$$

$$\left. + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{a^2 + \left(\frac{bl}{n\pi}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4}}\, t\right] \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{2.6}$$

Решение (2.6) показывает, что пластинка совершает периодические колебания с затуханием. Минимальная частота колебаний получается при $n = 1$. В зависимости от величин b^2 и δ частота колебаний n-ой гармоники может быть как меньше, так и больше частоты колебаний n-ой гармоники собственных колебаний ($j_0 = 0$).

Решение задачи, получаемое в случае $a^2 + (bl/\pi)^2 < (\delta/2)^2$, дает чисто затухающий процесс без периодических колебаний (апериодические колебания).

В промежуточном случае

$$a^2 + \left(\frac{bl}{m\pi}\right)^2 > \frac{\delta^2}{4} \quad \text{и} \quad a^2 + \left(\frac{bl}{(m+1)\pi}\right)^2 < \frac{\delta^2}{4}$$

часть волн ($n=1, 2, \ldots m$) совершает периодические колебания, другая часть ($n = m+1, m+2, \ldots$)—апериодические колебания.

Таким образом, частота колебаний существенно зависит как от величины b^2, так и от δ.

3. Решение задачи в случае шарнирно-опертой пластинки указывает возможные пути упрощений для задач с другими условиями закрепления. Так при условии $2a \gg \delta$ можно, не рассматривая характера затухания колебаний, исключить из уравнения (1.3) член с коэффициентом δ_1. В случае $bl/\pi \ll \delta/2$ задача сведется к исследованию уравнения (1.3) без члена с коэффициентом b^2.

Решение уравнения

$$a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

при граничных условиях (один край шарнирно-опертый, другой закрепленный)

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad w''(0, t) = 0, \quad w'(l, t) = 0$$

имеет вид

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t)(\operatorname{sh}k_n x/\operatorname{sh}k_n l-\sin\mu_n x/\sin\mu_n l)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$k_n=\frac{[(b^4+4\lambda_n^2a^4)^{1/2}+b^2]^{1/2}}{\sqrt{2}\,a},\qquad \mu_n=\frac{[(b^4+4\lambda_n^2a^4)^{1/2}-b^2]^{1/2}}{\sqrt{2}\,a},$$

где собственные значения λ_n являются корнями трансцендентного уравнения

$$\mu_n\operatorname{th}k_n l=k_n\operatorname{tg}\mu_n l.$$

Рассмотрим задачу колебаний бесконечной токонесущей пластинки при условии малости b^2

$$a^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\delta\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,$$

$$w(x,0)=\varphi(x),\quad \partial w(x,0)/\partial t=\psi(x)\quad(-\infty<x<\infty). \tag{3.1}$$

Необходимо различать три случая: 1) $\delta<2a$, 2) $\delta=2a$, 3) $\delta>2a$. Решение задачи (3.1) в первом случае имеет вид:

$$w=\frac{1}{2\sqrt{2a-\delta}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{\delta(\xi-x)^2}{8a^2t}\right]\left[\frac{\sqrt{2a-\delta}(\delta+a)}{a}\cos\frac{\gamma_1(\xi-x)^2}{8a^2t}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{(a-\delta)(2a+\delta)}{a}\sin\frac{\gamma_1(\xi-x)^2}{8a^2t}\right]+\psi(\xi)\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\exp\left[-\frac{\delta(\xi-x)^2}{8a^2\tau}\right]\times$$

$$\left.\times\left[\sqrt{2a-\delta}\cos\frac{\gamma_1(\xi-x)^2}{8a^2\tau}+\sqrt{2a+\delta}\sin\frac{\gamma_1(\xi-x)^2}{8a^2\tau}\right]d\tau\right\}d\xi,\quad \gamma_1=\sqrt{4a^2-\delta^2}.$$

Во втором случае:

$$w=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta t}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[\frac{3}{2}-\frac{(\xi-x)^2}{2\delta t}\right]\varphi(\xi)+t\psi(\xi)\right\}\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{2\delta t}\right]d\xi.$$

В третьем случае:

$$w=\frac{1}{2\gamma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\left[\frac{\delta+\gamma_2}{\sqrt{\delta-\gamma_2}}\exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{2(\delta+\gamma_2)t}\right)-\frac{\delta-\gamma_2}{\sqrt{\delta+\gamma_2}}\exp\left(-\frac{(\xi-x^2)}{2(\delta+\gamma_2)t}\right)\right]\varphi(\xi)+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\left[\sqrt{\delta+\gamma_2}\exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{2(\delta+\gamma_2)t}\right)-\sqrt{\delta-\gamma_2}\exp\left(-\frac{(\xi-x^2)}{2(\delta+\gamma_2t)}\right)\right]\psi(\xi)\right\}d\xi,$$

$$\gamma_2=\sqrt{\delta^2-4a^2}.$$

Из приведенных решений видно, что в первом случае $2a > \delta$ начальные возмущения пластинки затухают со временем, колеблясь около положения равновесия, а во втором и третьем случаях ($2a < \delta$) начальные возмущения затухают, не проходя через положение равновесия.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

Հոսանքատար սալերի մագնիսաառաձգականության խնդիրների առանձնահատկությունների մասին

Էլեկտրամագնիսական և առաձգական տեղափոխումների դաշտերի փոխազդեցությունը, սալի շարժման հավասարումներում, առաջացնում է նոր անդամներ։ Այդ անդամներից մի քանիսը չունեն մեխանիկական համանմանություն։

Ներկա աշխատանքում, մագնիսաառաձգականության որոշակի խնդրի օրինակի հիման վրա, ուսումնասիրվում է նշված անդամներով պայմանավորված առանձնահատկությունները։ Մասնավորապես դիտարկվում է խնդրի ինքնահամալուծ լինելու և համապատասխան սեփական ֆունկցիաների օրթոգոնալության պայմանները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян* ПММ, т. 35, вып. 2 (1971). [2] *С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян.* ПММ, т. 37, вып. 1 (1973). [3] *М. В. Белубекян*, Изв. АН Арм. ССР, «Механика», т. XXVII, № 2 (1974). [4] *М. В. Белубекян*, Изв. АН Арм. ССР, «Механика», т. XXVIII, № 2 (1974).