ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 2

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Геоленян

Об оптимальных размещениях и их свойствах

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 21.V 1975)

Задачи линейного размещения (нумерации) вершин графа с различными критериями исследованы во многих работах, например, [1-3].

Линейным размещением (размещением, нумерацией) n-вершинного графа $G=(X, U)$ назовем взаимно-однозначное соответствие $\varphi: X \to N=\{1, 2, \ldots, n\}$. Отображение φ сопоставляет вершинам графа целочисленные точки отрезка $[1, n]$, т. е. нумерует вершины.

Длиной размещения φ графа G назовем выражение

$$L(\varphi, G)=\sum_{(x, y)\in U} |\varphi(x)-\varphi(y)|.$$

Ребро $(x, y)\in U$ проходит над вершиной z при размещении φ, если $[\varphi(x)<\varphi(z)<\varphi(y)] \vee [\varphi(y)<\varphi(z)<\varphi(x)]$.

Шириной размещения φ графа G назовем $W(\varphi, G)=\max_{x\in X} w_\varphi(x)$,

где $w_\varphi(x)$—число ребер, проходящих над вершиной x при размещении φ.

Ребра (x_1, y_1) и (x_2, y_2) назовем пересекающимися при размещении φ, если каждое ребро проходит в точности над одной вершиной другого.

Размещение φ назовем плоским, если при этом размещении нет пересекающихся ребер.

Размещение φ орграфа G—допустимое, если

$$(x, y)\in U \to \varphi(x) > \varphi(y).$$

Множество всех размещений графа G обозначим через Φ_G, множество плоских размещений—Φ_G^0, множество допустимых размещений орграфа G—Φ_G^1. Φ_G^0, $\Phi_G^1 \subseteq \Phi_G$.

Сформулируем две задачи:

Найти размещение φ_0 неориентированного дерева $T=(X, U)$, $L(T)=L(\varphi_0, T)=\min_{\varphi\in\Phi_T} L(\varphi, T)$ (φ_0 будет L—оптимальным размещением).

— Найти размещение φ_0 неориентированного дерева $T=(X, U)$, $W(T)=W(\varphi_0, T)=\min\limits_{\varphi\in\Phi_T} W(\varphi, T)$ (φ_0 будет W-оптимальным размещением).

Хороших алгоритмов для решения этих задач еще не найдено. В ([1,2]) исследованы некоторые свойства оптимальных размещений. Для ориентированных деревьев найдены оптимальные допустимые размещения ([1,3]). В ([1,5]) найдены оптимальные плоские размещения для неориентированных деревьев.

Целью данной работы является исследование некоторых свойств L-оптимальных размещений неориентированных деревьев и установление близости к L или W—оптимальным соответствующих оптимальных плоских размещений.

В ([1,2]) приведены следующие свойства L-оптимальных размещений n-вершинного дерева T.

Пусть φ—L-оптимальное размещение. $x=\varphi^{-1}(1)$ и $y=\varphi^{-1}(n)$— обязательно являются висячими вершинами в T.

В L-оптимальном размещении вершины цепи $[x, y]$ размещаются (нумеруются) монотонно, вершины всех поддеревьев $T(x_i)$, „подвешенных" к цепи $[x, y]$ размещаются оптимально. Здесь x_i—вершины цепи, соединяющей $x=\varphi^{-1}(1)$ с $y=\varphi^{-1}(n)$. Такую цепь $[x, y]=$ $=x, x_1, \ldots, x_p, y$ назовем базовой.

Если бы можно было определить базовую цепь $[x, y]$ в T, то построение оптимального размещения свелось бы к построению базовых цепей в поддеревьях $T(x_i)$ и т. д.

Докажем, что в L-оптимальном размещении дерева T базовая цепь проходит через центр масс. (Центром масс дерева $T=(X, U)$ называется вершина x_0, в любой ветви к которой число вершин (без самой вершины x_0) не более половины общего числа вершин в T).

Введем некоторые определения.

Пусть $G_1=(X_1, U_1)$—некоторый подграф G, $|X_1|=n_1\leqslant|X|=n$. Для размещения φ размещением, собирающим подграф G_1 на $[a, b]$, где $b-a+1=n_1$, назовем $\varphi^*(G_1, [a, b])$.

$$\varphi^*: X_1\to[a, b];\ X\setminus X_1\to[1, 2, \ldots, n]\setminus[a, a+1, \ldots, b].$$

$$[(x, y\in X_1)\vee(x, y\in X\setminus X_1)]\ \&\ [\varphi(x)<\varphi(y)]\to\varphi^*(x)<\varphi^*(y).$$

Здесь и далее $\varphi: X\to[a, b]$ есть отображение X на $[a, a+1, \ldots, b]$. В $T=(X, U)$ с некоторой выделенной вершиной x_0 через $T(x_i)=(X_i, U_i)$, $x_i\in X_i$ обозначим максимальное поддерево, содержащее вершину x_i и все вершины, достижимые из x_0 цепями, содержащими x_i.

Пусть x_0—центр масс T; $x_1, \ldots, x_k$ все смежные с x_0 вершины и число вершин в $T(x_i)$, $|X_i|=\alpha_i$, $i=1, 2, \ldots, k$.

Лемма 1. *Для произвольного $\varphi\in\Phi_T$ дерева T существуют $\varphi_1\in\Phi_T$ и вершина x_i смежная с центром масс x_0 такие, что*

$$\varphi_1: T(x_i)\to[1, \alpha_i];\ T\setminus T(x_i)\to[\alpha_i+1, n],\ L(\varphi_1, T)\leqslant L(\varphi, T).$$

(Здесь выделенной вершиной в определении $T(x)$ считается x_0).

Доказательство. Рассмотрим вершину $z=\varphi^{-1}(1)$. Пусть $z\neq x_0$ (если $z=x_0$, то рассмотрим $\bar\varphi:\bar\varphi(x)=n+1-\varphi(x)$, $L(\bar\varphi, T)=L(\varphi, T)$, $\bar\varphi^{-1}(1)\neq x_0$).

1. $\exists x_l : z=\varphi^{-1}(1)\in T(x_l)$, $y=\varphi^{-1}(n)\overline{\in} T(x_l)$

1.1. $\varphi(x_0)=m_1<m_2=\varphi(x_l)$.

Обозначим через n_1 (соответственно n_2, n_3) число вершин из $T(x_l)$ таких, что $\varphi(x)\in[1, m_1-1]$ (соответственно $[m_1+1, m_2-1]$, $[m_2+1, n]$), $n_1+n_2+n_3+1=|X_l|=a_l$.

Обозначим $\varphi_1=\varphi^*(T(x_l), [1, a_l])$. При этом может увеличиться лишь длина ребра (x_0, x_l).

$$\delta_1=|\varphi(x_l)-\varphi(x_0)|-|\varphi_1(x_l)-\varphi_1(x_0)|=(m_2-m_1)-(m_1-n_1+n_1).$$

Длины цепей $[x_l, z]$ и $[x_0, y]$ уменьшились не менее чем на $\delta_2=[(m_2-1)-(n_1+n_2)]$ и $\delta_3=n_2+n_3+1$ соответственно.

$$L(\varphi, T)-L(\varphi_1, T)\geqslant\delta_1+\delta_2+\delta_3=2(m_2-m_1)>0.$$

1.2. $\varphi(x_l)=m_1<m_2=\varphi(x_0)$.

Аналогично 1.1. $L(\varphi_1, T)-L(\varphi_1, T)\geqslant\delta_1+\delta_2+\delta_3=0$,

где $\varphi_1=\varphi^*(T(x_l), [1, a_l])$, $\delta_1=(m_2-m_1)-(m_2+n_3-n_1-1)$, $\delta_2=m_1-n_1-1$, $\delta_3=(n-m_2)-(n-m_2-n_3)$.

В случае 1 лемма доказана.

2. $\exists x_l : z=\varphi^{-1}(1)\in T(x_l)$, $y=\varphi^{-1}(n)\in T(x_l)$.

Пусть $\varphi(x_l)=m_1<m_2=\varphi(x_0)$. (Обратный случай симметричен рассматриваемому).

2.1. $m_1<2n_1+n_2+2$.

Рассмотрим $\varphi_1=\varphi^*(T(x_l), [1, a_l])$. $\delta_1=|\varphi(x_0)-\varphi(x_l)|-|\varphi_1(x_0)-\varphi_1(x_l)|=(m_2-m_1)-(m_1+n_3-n_1-1)$, а уменьшение длины цепи $[y, z]$ не менее чем $\delta_2=(n-1)-(n_1+n_2+n_3)$.

$L(\varphi, T)-L(\varphi_1, T)\geqslant\delta_1+\delta_2=n-m_2-2m_1-2n_3-n_2\geqslant 2n_1+n_2+2-m_1>0$ (так как из определения центра масс $n\geqslant 2(n_1+n_2+n_3+1)$).

2.2. $m_1\geqslant 2n_1+n_2+2$.

Аналогично 2.1. $L(\varphi, T)-L(\varphi^*, T)>0$, где $\varphi^*=\varphi^*(T(x_l), [n-a_l+1, n])$. Размещение $\varphi_1:\varphi_1(x)=n-\varphi^*(x)+1$ искомое в случае 2.2. Лемма полностью доказана.

Лемма 2. *Для произвольного размещения $\varphi\in\Phi_T$ дерева T существуют $\varphi_2\in\Phi_T$ и вершины x_i, x_j, смежные с центром масс x_0, причем*

$$\varphi_2: T(x_i)\to[1, a_i];\ T(x_j)\to[n-a_j+1, n];\ L(\varphi_2, T)\leqslant L(\varphi, T).$$

Искомое φ_2 строится исходя из размещения φ_1, полученного в лемме 1, аналогичным образом. Легко видеть, что $L(\varphi, T)>L(\varphi_2, T)$, кроме случая 1.1 в лемме 1, т. е. в оптимальном размещении φ_0 $z=\varphi_0^{-1}(1)$ и $y=\varphi_0^{-1}(n)$ принадлежат разным $T(x_i)$, следовательно, цепь $[z, y]$ проходит через центр масс. Итак, доказана

Теорема. *В L-оптимальном размещении φ_0 дерева $T=(X,U)$ базовая цепь проходит через центр масс x_0, причем, если*

$\varphi_0^{-1}(1)\in T(x_i)$, $\varphi_0^{-1}(n)\in T(x_j)$, *то* $\varphi_0: X_i\to[1,|X_i|]$, $X_j\to[n-|X_j|+1,n]$, *где* x_i *и* x_j *смежные с* x_0 *вершины и* $i\neq j$.

Таким образом, при построении L-оптимального размещения базовую цепь надо искать лишь среди цепей, соединяющих висячие вершины через центр масс.

Для построения некоторого приближения к оптимальным размещениям в [1] предложена следующая конструкция. Любое $T=(X,U)$ можно превратить в ориентированное корневое, если выбрать некоторую $x\in X$ и ребра ориентировать в направлении „от x". Полученное дерево с корнем x обозначим $\vec{T}x$, а $\vec{S}(T)=\min_{x\in X} S(\vec{T}x)$, где символ S заменяет любой из символов L, W. Ищется $x^*\in X: \vec{S}(T)=S(\vec{T}x^*)$ и допустимое S-оптимальное размещение $\vec{T}x^*$ будет искомым приближением. Доказано, что $\vec{S}(T)\le 2S(T)$. Такая конструкция требует $O(n^2\log n)$ операций.

Пусть $S_{пл}(T)=\min_{\varphi\in\Phi_T^0} S(\varphi T)$. Алгоритмы нахождения $W_{пл}(T)$ и $L_{пл}(T)$ и соответствующих размещений приведены в [4,5], при этом число операций равно $O(n\log n)$.

Из того, что допустимые S-оптимальные размещения плоские [1,3], следует, что $S_{пл}(T)\le\vec{S}(T)$.

Итак, $S_{пл}(T)-S(T)\le\vec{S}(T)-S(T)$ и использование оптимального плоского размещения в качестве приближения к S-оптимальному эффективнее описанной конструкции из [1] в n раз.

Оценим $\vec{L}(T)-L_{пл}(T)$ снизу. Возьмем произвольное $\vec{T}x$ и его допустимое L-оптимальное размещение φ_0. Построим последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ такую, что $L(\varphi_i, T)\ge L(\varphi_{i-1}, T)$, $i=0, 1, \dots, n-1$ и $\forall i$, $\varphi_i\in\Phi_T^0$.

Для построения φ_i рассмотрим любую, ранее не рассматривавшуюся, вершину z. Если в $\vec{T}x$ $\rho^+(z)<2$, то $\varphi_i=\varphi_{i-1}$.

Пусть $\rho^+(z)\ge 2$, вершины $x_1, \dots, x_k$ — непосредственные последователи z в $\vec{T}x$, $\varphi_{i-1}(x_j)<\varphi_{i-1}(x_{j-1})$, $j=2, 3, \dots, k$, а x_0 — вершина, непосредственно предшествующая z, причем $\varphi_{i-1}[T(z)]=[a, b]$, $\varphi_{i-1}(x_j)<\varphi_{i-1}(z)<\varphi_{i-1}(x_0)$. Построим φ_i следующим образом:

$\varphi_i(y)=\varphi_{i-1}(y)$, если $y\bar{\in} T(z)$ или $y\in T(x_j)$, $j=\left[\frac{k}{2}\right]+1, \ldots, k$;

$\varphi_i(z)=\min \varphi_{i-1}[T(x_{[k/2]})]$;

$$\varphi_i: \bigcup_{1<j<[k/2]} T(x_j)\to[\varphi_j(z)+1, b], \text{ причем } \forall t_1, t_2\in \bigcup_{1<j<[k/2]} T(x_j)$$

$$[\varphi_{i-1}(t_1)<\varphi_{i-1}(t_2)\to\varphi_i(t_1)>\varphi_i(t_2)].$$

Непосредственными вычислениями можно получить:

$$L(\varphi_i, T)-L(\varphi_{i-1}, T)\geqslant\left(k-\left[\frac{b}{2}\right]-1\right)\sum_{i=1}^{[b/2]} L(\varphi_i, T(x_i)),$$

$$L(\varphi_0, T)-L(\varphi_m, T)\geqslant\sum_{\rho^+(x)>2}(\rho^+(x)-[\rho^+(x)/2]-1)[\rho^+(x)/2]\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{4}\sum_{\rho(x)>4}(\rho(x)-4)(\rho(x)-1)=\Delta. \quad \text{Откуда } \bar{L}(T)-L_{\text{пл}}(T)\geqslant\Delta.$$

Верно также $\vec{W}(T)=W(\varphi_0, T)\geqslant W(\varphi_n, T)$, при этом на каждом шаге $\forall t\in\bigcup_{j=1}^{[k/2]} T(x_j)$ $w_{\varphi_{i-1}}(t)\geqslant w_{\varphi_i}(t)+k-\left[\frac{k}{2}\right]$.

Ереванский НИИ математических машин

Հ. Գ. ԳԵՈԼԵՑՅԱՆ

Օպտիմալ դասավորումների և նրանց ճանկուրյունների մասին

Ապացուցվում է, որ $T=(X, U)$ ոչ կողմնորոշված ծառի φ L—օպտիմալ դասավորման $[\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(n)]$ բազմալական շղթան պետք է անցնի մասալի կենտրոնով:

Ցույց է տրված, որ $L(T)\leqslant L_{\text{пл}}(T)\leqslant\vec{L}(T)$ (այդպիսի անհավասարություն տեղի ունի նաև լայնության հայտանիշի համար), ընդ որում $\vec{L}(T)-L_{\text{пл}}(T)\geqslant 1/4\sum_{\rho(x)>4}(\rho(x)-4)(\rho(x)-1)$, որտեղ $L(T)$-ն T ոչ կողմնորոշված ծառի օպտիմալ դասավորման երկարությունն է. $L_{\text{пл}}(T)$-ն—օպտիմալ հարթ դասավորման երկարությունն է, $\vec{L}(T)$-ն T ծառից ստացված բոլոր կողմնորոշված ծառերի օպտիմալ թույլատրելի դասավորումների երկարություններից նվազագույնը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] М. А. *Шейдвассер*. О длине и ширине размещений графов в решетках. «Проблемы кибернетики», вып. 29, 1974. [2] М. А. *Иорданский*. ДАН СССР, т. 218, 1. 2 (1974). [3] *Р. Реджеевски*. Об арифметических выражениях и деревьях. «Кибернетический сборник», новая серия, вып. 7, 1970. [4] *Г. Г. Геолецян*. ДАН Арм. ССР, т. 56, № 4 (1973). [5] *Г. Г. Геолецян*, «Вопросы радиоэлектроники», сер. ЭВТ, вып. 6, 1975.