ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 1

УДК 513.838

МАТЕМАТИКА

С. Х. Арутюнян

Геометрия n-кратного интеграла, зависящего от n параметров

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 14/IV 1975)

При решении разного рода задач анализа приходится рассматривать интегралы вида

$$I = \int K(x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n)\, dx^1 \ldots dx^n,$$

которые зависят от n параметров.

Цель настоящей работы состоит в изучении геометрии, которая определяется таким интегралом в пространстве переменных

$$x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n.$$

Для этого к интегралу (при наличии некоторых естественных условий) инвариантно присоединяется псевдориманова метрика, впервые рассмотренная П. К. Рашевским ([1]). Показано, что в случае метрик эйнштейнова типа и только в этом случае существует двойственный интеграл, который имеет смысл применять к задаче обращения интегрального преобразования с ядром k.

Рассмотрим дифференцируемое многообразие M четной размерности 2n, которое одновременно является дважды расслоенным пространством: задано два дифференцируемых отображения M на n-мерные дифференцируемые многообразия M_1 и M_2, обозначим их через π_1 и π_2; слои расслоения, то есть прообразы точек из M_1 и M_2 при отображениях π_1 и π_2, являются n-мерными многообразиями, и, наконец, касательные пространства к слоям расслоений π_1 и π_2 имеют лишь нулевое пересечение.

Зафиксируем в пределах произвольной карты с локальными координатами $x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n$ некоторый репер $(e_i)_0$, $(e^k)^0$, $i, k = 1, \ldots, n$ и положим

$$e_i = \bar{x}_i^k (e_k)_0, \quad e^i = \bar{y}_k^i (e^k)^0,$$

где новые переменные $\bar{x}_i^k$ и $\bar{y}_k^i$ независимы от ранее введенных координат и друг от друга, причем образуют матрицы с ненулевыми определителями. Образуем дифференциальные формы.

$$\omega^i = x_k^i\, dx^k, \quad \omega_i = y_i^k\, dy_k.$$

где через x_k^i и y_i^k обозначены элементы матриц, обратных естественно к матрицам $(\bar{x}_i^k)$ и $(\bar{y}_k^i)$ [2].

Таким образом, в каждой точке касательного пространства к слою имеется базис, который преобразуется элементами полной линейной группы. В результате на всем пространстве двойного расслоения возникает подвижный репер, половина векторов которого в каждой точке составляет базис касательного пространства к слою в этой точке, и система заданных на всем $M^{(1)}$ линейных дифференциальных форм

$$\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega^1, \ldots, \omega^n,$$

не зависящих от выбора локальных координат. Эти главные формы характеризуют расслоение M в следующем смысле: слои первого расслоения являются интегральными многообразиями максимальной размерности для системы уравнений $\omega^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, а слои второго расслоения находятся в аналогичном отношении с вполне интегрируемой системой линейных дифференциальных уравнений $\omega_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Структурные уравнения этих форм получаются в результате внешнего дифференцирования их выражений. Таким образом, они имеют вид

$$\begin{cases} d\omega^i = \omega_k^i \wedge \omega^k \\ d\omega_i = -\bar{\omega}_i^k \wedge \omega_k, \end{cases} \tag{1}$$

где $\omega_k^i = \bar{x}_k^p d x_p^i + x_{kp}^i \omega^p$, $\bar{\omega}_i^k = -\bar{y}_p^k dy_i^p + y_i^{kp} \omega_p$, причем переменные x_{kp}^i и y_i^{kp} симметричны относительно индексов k и p.

Внешнюю дифференциальную n-форму вида

$$\Omega = K(x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

на многообразии M двойного расслоения будем называть полубазовой n-формой первого расслоения π_1. Она определяет гладкую меру (объем) на каждом слое второго расслоения π_2. Форму Ω можно, подставив вместо dx^i их выражения через ω^i, записать в виде

$$\Omega = \lambda \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n,$$

где $\lambda = k \cdot \det(\bar{x}_i^j)$ является гладкой функцией, определенной на многообразии $M^{(1)}$ реперов и отличной от нуля.

Найдем условия, которым удовлетворяет функция λ. Внешний дифференциал

$$d\Omega = (d\lambda + \lambda \sum_{i=1}^{n} \omega_i^i) \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$$

является формой на M. Для этого необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение

$$d \ln \lambda + \sum_{i=1}^{n} \omega_i^i = \lambda_i \omega^i + \lambda^i \omega_i \tag{2}$$

Часть уравнений, которые получаются в результате внешнего дифференцирования соотношения (2) и применении леммы Картана [3], имеет вид

$$d\lambda^l - \lambda^k \omega^l_k = \lambda^{lk} \omega_k + \lambda^l_k \omega^k, \tag{3}$$

где коэффициенты λ^{lk} симметричны относительно индексов l и k. Заметим теперь, что форма $\varphi = \lambda^l \omega_l$ является формой на многообразии двойного расслоения M. Это следует из того факта, что φ однозначно определяется условием

$$d\Omega = \varphi \wedge \Omega$$

и, кроме того, обращением в нуль на слоях второго расслоения π_2. Внешний дифференциал формы φ с помощью соотношений (3) может быть приведен к виду

$$d\varphi = \lambda^l_k \omega^k \wedge \omega_l + \lambda^{lk} \omega_k \wedge \omega_l$$

В силу симметричности коэффициентов λ^{lk} относительно l и k и антикоммутативности внешнего умножения $\lambda^{lk}\omega_k \wedge \omega_l = 0$ и поэтому

$$d\varphi = \lambda^l_k \omega^k \wedge \omega_l$$

Будем предполагать форму $d\varphi$ невырожденной, этим из рассмотрения исключается случай, когда $det(\lambda^l_k) = 0$. Тогда матрицу (λ^l_k) можно привести к диагональному виду и сделать единичной. Поэтому $\lambda^l_k = \delta^l_k$ и

$$d\varphi = \omega^l \wedge \omega_l \tag{4}$$

Отметим сразу, что на $M^{(1)}$ выделяется подмногообразие $M^{(1)}_1 \subset M^{(1)}$ реперов, характеризующихся условием $\lambda^l_k = \delta^l_k$ (форма $d\varphi$ на $M^{(1)}_1$ имеет вид (4)).

Форма (4), как легко можно проверить [4], порождает на пространстве расслоения метрику по формуле

$$dl^2 = \Theta^l \cdot \Theta_l, \tag{5}$$

где $\Theta^l = \omega^l$, $\Theta_l = \omega_l$ (по индексу l идет суммирование по всем значениям $l = 1, \dots, n$). Благодаря ковариантному постоянству метрики (5) уравнения соответствующей псевдоримановой связности могут быть приведены к виду:

$$\begin{cases} d\Theta^l = \Theta^l_k \wedge \Theta^k \\ d\Theta_l = -\Theta^k_l \wedge \Theta_k, \end{cases}$$

где Θ^l_k — формы связности. Внешнее дифференцирование этих уравнений и применение леммы Картана дают соотношение

$$d\Theta^l_k - \Theta^l_p \wedge \Theta^p_k = K^{lr}_{kp} \Theta^p \wedge \Theta_r,$$

где величины K^{lr}_{kp} симметричны по верхним и нижним индексам и в совокупности образуют тензор кривизны расслоенного пространства.

Таким образом, рассматриваемое расслоенное пространство несколько специализировалось благодаря наличию невырожденной формы $d\varphi$ и превратилось в пространство, рассмотренное П. К. Рашевским ([1]). Оно характеризуется выделенностью двух семейств n-мерных поверхностей (слоев первого и второго расслоений) и тем, что каждое из этих семейств обладает свойством абсолютного параллелизма: векторы, касательные к слоям данного семейства, остаются касательными к ним при параллельном переносе по любому пути.

Таким образом, имеет место

Предложение. *Задание на пространстве двойного $2n$ расслоения M внешней n-формы Ω, полубазовой на слоях одного из расслоений, при условии невырожденности соответствующей формы $d\varphi$ определяет на многообразии M структуру расслоенного пространства Рашевского.*

Все дальнейшие рассмотрения относятся только к расслоенным пространствам Рашевского. Отметим, что подмногообразие $M_1^{(1)}$ реперов такого пространства описывается с помощью компонент метрического тензора, соответствующего метрике (5):

$$g_{ik}=g^{ik}=0,\ g_k^i=\delta_k^i,\ i,k=1,\ldots,n.$$

Рассмотрим теперь на многообразии $M_1^{(1)}$ реперов произвольного пространства Рашевского дифференциальные формы Θ_i, Θ^i, Θ_k^i, удовлетворяющие системе внешних уравнений

$$\left|\begin{aligned} d\Theta^i &= \Theta_k^i\wedge\Theta^k\\ d\Theta_i &= -\Theta^k\wedge\Theta_k\\ d\Theta_k^i &= \Theta_p^i\wedge\Theta_k^p+K_{kp}^{ir}\Theta^p\wedge\Theta_r,\end{aligned}\right. \tag{1'}$$

определенную псевдориманову метрику (5) и соответствующую связность. Выясним при каких условиях форма

$$\Phi_1=a\Theta^1\wedge\ldots\wedge\Theta^n$$

обладает свойствами формы Ω. Исходя из тех же соображений, что и при получении разложения (2), будем иметь

$$d\ln a+\sum_{i=1}^{n}\Theta_i^i=a_i\Theta^i+a^i\Theta_i \tag{6}$$

Внешнее дифференцирование этого соотношения с последующим применением леммы Картана дает

$$\left|\begin{aligned} \triangle a_i &= a_{ik}\Theta^k+a_i^k\Theta_k,\ a_{ik}=a_{ki}\\ \triangle a^i &= \bar{a}_k^i\Theta^k+a^{ik}\Theta_k,\ a^{ik}=a^{ki},\end{aligned}\right. \tag{3'}$$

где обозначено

$$\left|\begin{aligned} \triangle a_i &= da_i+a_k\Theta_i^k\\ \triangle a^i &= da^i-a^k\Theta_k^i\end{aligned}\right.$$

Обратная подстановка этих выражений в результат дифференцирования (6) даст конечное соотношение

$$\bar{a}^p_q - a^p_q = K^p_q, \tag{7}$$

где через K^p_q обозначены компоненты тензора Риччи:

$$K^p_q = \sum_{i=1}^{n} K^{ip}_{iq};$$

на основании этих формул получаем

$$d\Phi_1 = a^i \Theta_i \wedge \Theta^1 \wedge \ldots \wedge \Theta^n$$

Выделим теперь форму $\varphi_1 = a^i \Theta_i$ (заметим, что она, по-существу, совпадает с формой $a^i \omega_i$ из (2)) и сосчитаем ее внешний дифференциал:

$$d\varphi_1 = \ldots = \bar{a}^i_k \Theta^k \wedge \Theta_i$$

Но с другой стороны Φ_1 играет роль Ω, поэтому

$$d\varphi_1 = \Theta^i \wedge \Theta_i$$

Сравнение этих соотношений приводит к равенству:

$$\bar{a}^i_k = \delta^i_k \tag{8}$$

Условие (8) является необходимым и достаточным для того, чтобы Φ_1 обладала свойствами формы Ω.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть на пространстве M двойного расслоения задана полубазовая форма Φ_1 первого расслоения π_1 с соответствующей невырожденной формой $d\varphi_1$. Форма объема на пространстве Рашевского имеет вид

$$\Phi = \Theta^1 \wedge \ldots \wedge \Theta^n \wedge \Theta_1 \wedge \ldots \wedge \Theta_n.$$

Выделим среди множества внешних n-форм вида

$$\rho \Theta_1 \wedge \ldots \wedge \Theta_n$$

полубазовую форму Φ_2 второго расслоения с соответствующей невырожденной формой $d\varphi_2$ таким образом, чтобы

$$\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2, \tag{9}$$

и выясним условия, при осуществлении которых формы Φ_1 и Φ_2 порождают на пространстве M двойного расслоения одну и ту же геометрию Рашевского.

Предположим, что Θ_i, Θ^i, Θ^i_k — структурные формы искомого пространства Рашевского ($i,k = 1, \ldots, n$). Тогда, если $\Phi_1 = a\Theta^1 \wedge \ldots \wedge \Theta^n$, то форму Φ_2 определим формулой

$$\Phi_2 = \frac{1}{a}\Theta_1 \wedge \ldots \wedge \Theta_n,$$

этим условие (9) выполнено. Рассматривая Φ_2 по аналогии с формой Φ_1, получим

$$d\Phi_2 = \ldots = -a_i \Theta^i \wedge \Theta_1 \wedge \ldots \wedge \Theta_n.$$

Внешний дифференциал формы $\varphi_2 = -a_i \Theta^i$ равен

$$d\varphi_2 = -a_i^k \Theta_k \wedge \Theta^i.$$

Две римановы метрики на одном и том же многообразии считают эквивалентными, если они отличаются постоянным множителем. Значит для того, чтобы формы Φ_1 и Φ_2 определяли одну и ту же псевдориманову геометрию, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие формы $d\varphi_1$ и $d\varphi_2$ отличались постоянным ненулевым множителем:

$$d\varphi_2 = c\, d\varphi_1, \quad c = \text{const} \neq 0;$$

тогда тензор Риччи принимает вид

$$K_p^i = (1-c)\,\delta_p^i. \tag{10}$$

Как известно, пространства, тензор Риччи которых пропорционален (с постоянным коэффициентом) метрическому тензору, называются пространствами Эйнштейна. Поскольку в данном случае роль компонент метрического тензора играют символы Кронеккера, имеет место

Теорема. *Пусть в пространстве двойного расслоения полубазовые формы Φ_1 и Φ_2 первого и второго расслоений определяют одну и ту же псевдориманову геометрию Рашевского, в которой форма объема имеет вид:*

$$\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$$

Тогда пространство Рашевского имеет структуру пространства Эйнштейна.

Обратно, на пространстве Рашевского, удовлетворяющем уравнению $g_{ir} = K.K_{ir}$ Эйнштейна, существуют формы Φ_1 и Φ_2 с вышеуказанными свойствами.

В качестве иллюстрации к изложенному выясним вопрос, какие именно интегралы порождают псевдоевклидово пространство Рашевского (кривизна равна нулю). В этом случае можно пользоваться подсемейством параллельных реперов $(\Theta_i^k = 0)$. Тогда

$$d\Theta^i = o, \quad d\Theta_i = o$$

и, полагая $\Theta^i = dx^i$, $\Theta_i = dy_i$, получим уравнения нашей задачи в виде

$$\Phi_1 = a\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

$$d\ln a = a_i dx^i + a^i dx_i \tag{6}$$

$$\begin{cases} du_i = u_{ik}\, dx^k + dy_i \\ da^i = dx^i + a^{ik}\, dx_k \end{cases} \qquad (3'')$$

Дифференцируя соотношения (3''), получим

$$da_{ik} \wedge dx^k = o, \quad da^{ik} \wedge dy_k = 0,$$

откуда следует, что

$$u_{ik} = u_{ik}(x', \ldots, x^n), \quad a^{ik} = a^{ik}(y_1, \ldots, y_n)$$

Интегрирование уравнений (3'') дает

$$u_i = A_i(x', \ldots, x^n) + y_i,$$
$$a^i = x^i + A^i(y_1, \ldots, y_n).$$

Подставим эти выражения в соотношение (6') и проинтегрируем полученное уравнение. Поскольку интеграл от формы $A_i(x', \ldots, x^n)dx^i$ является функцией от $x', \ldots, x^n$, а интеграл от формы $A^i(y_1, \ldots, y_n)dy_i$ —функцией от $y_1, \ldots, y_n$, то форма Φ_1 принимает вид

$$\Phi_1 = P(x', \ldots, x^n)\, Q(y_1, \ldots, y_n)\, e^{x^i y_i}\, dx' \wedge \ldots \wedge dx^n \qquad (11);$$

легко видеть, что при этом

$$\Phi_2 = \frac{1}{P(x', \ldots, x^n)\, Q(y_1, \ldots, y^n)}\, e^{-x^i y_i} dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$$

Таким образом, имеет место

Предложение. *Всякий интеграл, порождающий в М псевдоевклидову метрику Рашевского, может быть приведен к интегралу от формы вида* (11).

Тем самым выяснен внутренний геометрический смысл интегралов Лапласа—Фурье. Интегралы, приводящие к метрикам Эйнштейна, следует считать естественным обобщением интегралов такого типа.

Приношу свою глубокую благодарность А. М. Васильеву за постановку задачи и внимательное отношение к работе.

Московский государственный университет
им. Ломоносова

Ա. Բ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

n պարամետրերից կախված n-պատիկ ինտեգրալի երկրաչափություն

Սույն աշխատանքի նպատակը n-պատիկ

$$J = \int K(x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n)\, dx^1 \ldots dx^n$$

ինտեգրալի շնորհիվ $x^1, \ldots, x^n$ փոփոխականների և $y_1, \ldots, y_n$ պարամետրների բազմաձևության մեջ առաջացող երկրաչափության ուսումնասիրությունն է։ Հիմնական արդյունքն այն է, որ J ինտեգրալին ինվարիանտ կերպով միաց-

վում է պսեվդոռիմանյան մետրիկա, որը և պայմանավորում է այդ ինտե-գրալի բոլոր ինվարիանտ հատկությունները։

Ապացուցված է, որ էյնշտեյնյան մետրիկաներին համապատասխանող ինտեգրալները (և միայն նրանք) թույլ են տալիս երկակի

$$\bar{I}=\int\bar{K}(y_1,\ldots,y_n,x^1,\ldots,x^n)dy_1\ldots dy_n$$

ինտեգրալներ, այսինքն բնական կերպով ընդհանրացնում են Ֆուրյե-Լապլասի ինտեգրալը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П. К. Рашевский*, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, т. 6. 225—248, 1948. [2] *А. М. Васильев*, Математический сборник, т. 70 (112) : 4, 457—480. 1966. [3] *С. Стернберг*, «Лекции по дифференциальной геометрии», «Мир», М., 1970. [4] *А. П. Норден*, «Пространства аффинной связности», М.—Л., Гостехиздат, 1950.