ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 1

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. М. Гюлумян

О критических по раскраске графах

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 2/VI 1975)

В настоящей статье описано необходимое и достаточное условие существования χ-реберно-критических $\varkappa$-связных графов с p вершинами для произвольных целых чисел $\chi \geq 4$, $\varkappa \leq \chi - 1$ и p.

Все понятия и обозначения не определяемые здесь, можно найти в работе Ф. Харари [1]. Пусть $G = G(V, X)$ — конечный граф без петель и кратных ребер.

Граф G назовем n-связным, если $\varkappa(G) = n$. Пусть H является подграфом для заданных графов G_1 и G_2. Тогда объединением $G_1 \underset{H}{\cup} G_2 = G$ относительно H, называется граф G, который получается из G_1 и G_2 совмещением их общей части H по одноименным вершинам. $W^{n,m}$ — колесом назовем граф $W^{n,m} = K_n + C_m$, где K_n полный граф с n вершинами, а C_m простой цикл длины m. Цикл C_m будем называть внешним циклом, а его ребра (вершины) внешними ребрами (вершинами) $W^{n,m}$ — колеса, K_n будем называть центром $W^{n,m}$ — колеса, а его вершины и ребра — центральными. Ребро, соединяющее внешнюю вершину с центральной, будем называть внутренним ребром.

Легко убедиться, что имеет место

$$\chi(G_1 + G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2) \tag{1}$$

и $G_1 + G_2$ является критическим (реберно-критическим) тогда и только тогда, когда G_1 и G_2 критические (реберно-критические). Очевидно также, что

$$\varkappa(G_1 + G_2) = \min\{|V_1| + \varkappa(G_2), |V_2| + \varkappa(G_1)\}, \tag{2}$$

где V_1 и V_2 множества вершин G_1 и G_2 соответственно.

Теорема 1. *Для любых $\chi \geq 4$, $p \geq \chi + 2$ существует χ-реберно-критический $\chi - 1$-связный p-вершинный граф.*

Доказательство. При $p = \chi + 2 + 2t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ колесо $W^{\chi-3, 2t+5}$ по (1) и (2) — искомый граф.

Пусть $p = \chi + 2 + (2t + 1)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$. Рассмотрим граф

$$\overline{G}^{\chi+2t+3} = W^{2t+7} + K_{\chi-4} \tag{3}$$

где W^{2t+7} — граф, изображенный на рис. 1. Легко видеть, что

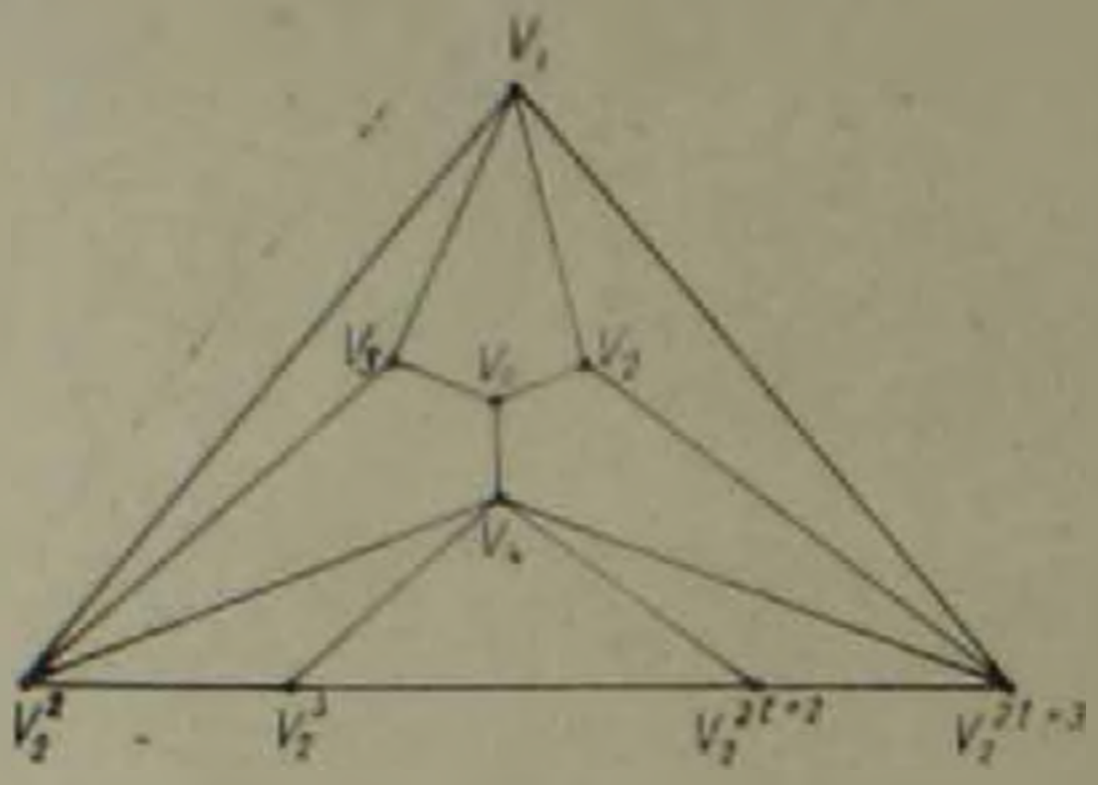

Рис 1

W^{2t+3} является 4-реберно-критическим 3-связным. $\overline{G}^{\chi+3+2t}$ — искомый граф, так как согласно (2) $\varkappa(\overline{G}^{\chi+3+2t}) = \chi-1$ и согласно (1) $\chi(\overline{G}^{\chi+3+2t}) = \chi$.

Теорема 2. *Для любых $\chi \geq 5$, $3 \leq \varkappa \leq \chi-2$, $p \geqslant 2\chi-\varkappa+1$ существует χ-реберно-критический $\varkappa$-связный p-вершинный граф.*

Доказательство. Пусть $p = 2\chi-\varkappa+1+2t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$. Рассмотрим граф

$$\overline{W}^{\chi-2,2t+3} = W^{\chi-2,2t+3} - x_1 - x_2 - \ldots - x_{2t+2},$$

где $x_1 = (v_1, v_2^1)$, $x_2 = (v_1, v_2^2)$, …, $x_{2t+2} = (v_1, v_2^{2t+2})$ являются внутренними ребрами $W^{\chi-2,2t+3}$ — колеса, а v_1 — произвольная центральная вершина $W^{\chi-2,2t+3}$ — колеса.

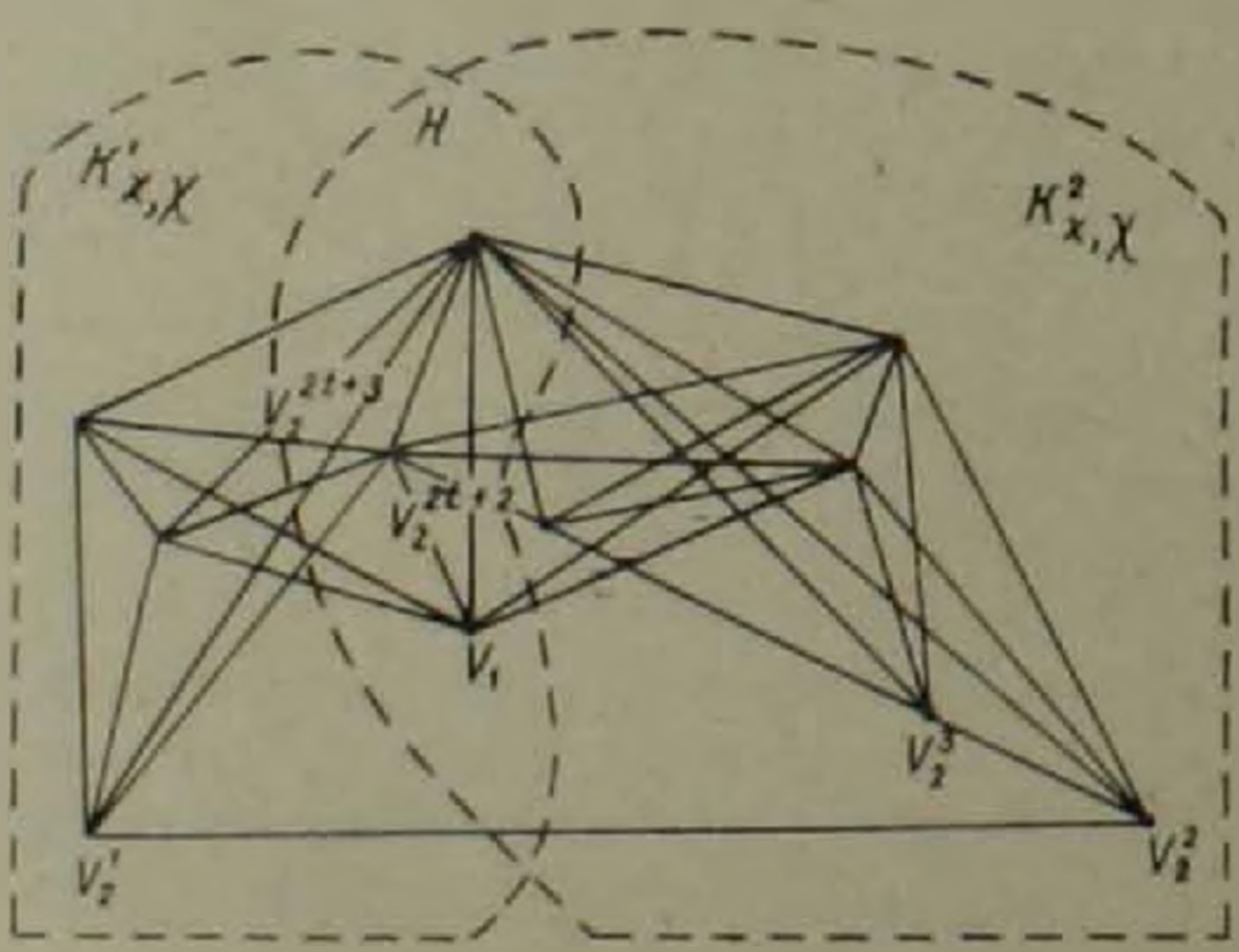

Рис. 2

Пусть

$$K^1_{\varkappa,\chi} = (\overline{W}^{\varkappa-2,2t+3} - v_2^2 - \ldots - v_2^{2t+2}) + K_{\chi-\varkappa}$$

$$K^2_{\varkappa,\chi} = (\overline{W}^{\varkappa-2,2t+3} - v_2^1) + K_{\chi-\varkappa}.$$

Тогда в качестве искомого графа берем граф

$$G^0 = (K^1_{\varkappa,\chi} \underset{H}{\cup} K^2_{\varkappa,\chi}) + (v_2^1, v_2^2),$$

где $H = K_{\varkappa-2} + v_2^{2t+3}$ (рис. 2). Построенный граф G^0 имеет $2\chi-\varkappa+1+2t$ вершин. Так как $\varkappa \leqslant \chi-2$, то $\varkappa(K^i_{\varkappa,\chi}) \geqslant \varkappa$, $i = 1, 2$. Следовательно, $\varkappa(G^0) = \varkappa$. Покажем, что G_0 является χ-реберно-критическим графом. Если $G^0-(v_2^1, v_2^2)$ произвольно $\chi-1$ раскрашен, то, ввиду χ-реберной-критичности графов $K^i_{\varkappa,\chi} + x_i$, $i = 1, 2$, вершины v_1, v_2^1, v_2^2 одноцветны. Следовательно, $\chi(G^0) \geqslant \chi$. С другой стороны, удаление любого ребра x из G^0 делает возможным $\chi-1$-раскраску графа $G^0 - x$, ввиду χ-реберной-критичности $K^i_{\varkappa,\chi} + x_i$, $i = 1, 2$.

Пусть $p = 2\chi-\varkappa+4+2t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$. Граф, построенный по (3), запишем в виде

$$\overline{G}^{\varkappa+3+2t} = W^{2t+7} + K_{\varkappa-2} + K_{\chi-\varkappa-1}$$

и пусть $\overline{K}^2_{\varkappa,\chi} = \overline{G}^{\varkappa+3+2t} - \chi_t$. Рассмотрим граф

$$G^1 = (K^1_{\varkappa,\chi} \underset{H}{\cup} \overline{K}^2_{\varkappa,\chi}) + (v_2^1, v_2^2),$$

где $H = K_{\varkappa-2} + v_2^{2t+3}$ (Рис. 3). G^1 — искомый граф для рассматриваемого

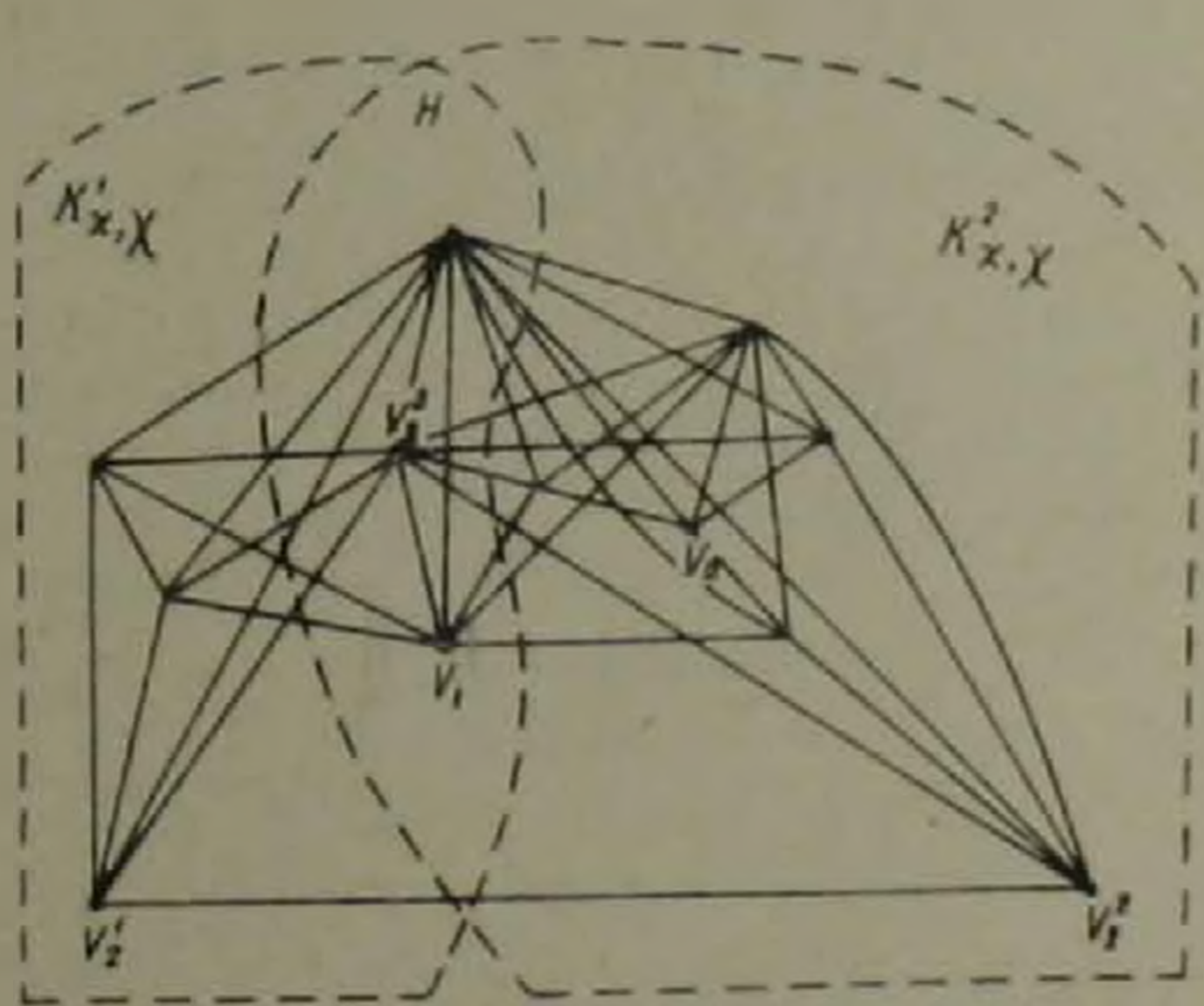

Рис. 3

случая. В этом легко убедиться прежним путем.

Пусть $p = 2\chi-\varkappa+2$. Подграф графа W^1 (рис. 1), порожденный вершинами v_1, v_2^2, v_2^1, v_2, v_3, обозначим через G^3, а подграф графа

W^4, порожденный вершинами v_0, v_2, v_3, v_4 — через G_1. Пусть

$$J^1_\chi = K_{\chi-4} + G^1,$$

$$J^2_\chi = K_{\chi-4} + G^1$$

и пусть

$$N_{3,\chi} = (J^1_\chi \underset{v_2, v_3}{\cup} J^2_\chi) + (v_4, v_2^2) + (v_4, v_2^1).$$

Не трудно заметить, что $N_{3,\chi}$ является χ-реберно-критическим 3-связным $2\chi-1$-вершинным графом.

Рассмотрим граф

$$G^2 = N_{3,\chi-\varkappa+3} + K_{\varkappa-3}.$$

Он имеет $2\chi-\varkappa+2$ вершин, а так как $N_{3,\chi-\varkappa+3}$, $K_{\varkappa-3}$ реберно-критические и, согласно (1), $\chi(G^2)=\chi$, то G^2 является χ-реберно-критическим. Для завершения доказательства теоремы достаточно пользоваться формулой (2).

Теорема 3. *Для любых $\chi \geq 4$, $p \geq 2\chi-1$ и $p \neq 2\chi$ существует χ-реберно-критический 2-связный p-вершинный граф.*

Доказательство. Пусть $p = 2\chi-1+2t$, $t=0, 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим $\overline{K}_\chi = K_\chi - (v_1^1, v_2^1)$ и $\overline{W}^{\chi-3,2t+3} = W^{\chi-3,2t+3} - (v_1^2, v_2^2)$, где (v_1^1, v_2^1) и (v_1^2, v_2^2) ребра графов K_χ и $W^{\chi-3,2t+3}$ соответственно. Через G обозначим граф, получаемый из $\overline{K}_\chi$ и $\overline{W}^{\chi-3,2t+3}$ совмещением вершин v_1^1, v_1^2 и добавлением ребра (v_2^1, v_2^2). Очевидно, G 2-связен χ-реберно-критичен и имеет $2\chi-1+2t$ вершин.

При $p = 2\chi+2+2t$, $t=0, 1, 2, \ldots$, вместо $W^{\chi-3,2t+3}$ берем граф $\overline{G}^{\chi+1+2t}$, построенный по (3), и поступаем аналогичным образом.

Теорема 4. *Для любых $\chi \geq 4$, $\varkappa$, $p < 2\chi-\varkappa$ не существует χ-критического $\varkappa$-связного p-вершинного графа, за исключением K_χ.*

Доказательство. Будем считать, что $2 \leq \varkappa \leq \chi-1$, так как в противном случае утверждение теоремы тривиально. Пусть задан χ-критический $\varkappa$-связный граф $G=G(V, X)$ и пусть $G-v_1-v_2-\ldots-v_\varkappa$ состоит из компонент связности $G_1=G_1(V_1, X_1), \ldots, G_k=G_k(V_k, X_k)$, где $k \geq 2$. Так как $\rho(v) \geq \chi-1$ для произвольной вершины v графа G, то $|V_i| \geq \chi-\varkappa$, $i \in \overline{1, k}$ и, следовательно, $p \geq k\chi-(k-1)\varkappa$, причем равенство достигается только в случае, если $|V_i| = \chi-\varkappa$, $i \in \overline{1, k}$. Очевидно, при $K>2$ или, если для некоторого $i \in \overline{1, k}$, $|V_i| > \chi-\varkappa$, то $p>2\chi-\varkappa$. Следовательно, достаточно рассмотреть случай $k=2$ и $|V_1|=|V_2|=\chi-\varkappa$, откуда следует, что всякая вершина $v \in V_i$ смежна со всеми вершинами из $V \setminus V_j$, где $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Известно ([1]), что критический граф нельзя разделить полным подграфом, следовательно, разрез $V \setminus (V_1 \cup V_2)$ графа G содержит несмежные вершины v_i, v_j, $i, j \in \overline{1, \varkappa}$ и $i \neq j$. Граф G $\chi-1$-раскрашиваем, так как даже в случае смежности всевозможных пар вершин разреза (кроме пары v_i, v_j), $\chi(G)=\chi-1$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Для любых $\chi \geq 4$, $\varkappa$, $p \leqslant 2\chi - \varkappa$ не существует χ-реберно-критического $\varkappa$-связного p-вершинного графа, за исключением K_χ.*

Теорема 5. *Для любого $\chi \geq 4$ не существует χ-критического 2-связного 2χ-вершинного графа.*

Доказательство. При $\chi = 4$ утверждение теоремы следует из работы [2]. Пусть $\chi \geq 5$ и существует χ-критический 2-связный граф $G = G(V, X)$ с 2χ вершинами. Обозначим через $\{v_1, v_2\}$ некоторый разрез графа G и пусть компонентами связности графа $G - v_1 - v_2$ являются $G^i = G^i(V^i, X^i)$, где $i \in \overline{1, k}$. Так как для любой вершины v графа G имеет место $\varphi(v) \geq \chi - 1$, то $|V^i| \geq \chi - 2$ при $i \in \overline{1, k}$. Следовательно, $k = 2$. Возможны следующие случаи:

$$1.\ |V^1| = \chi,\ |V^2| = \chi - 2.$$

$$2.\ |V^1| = |V^2| = \chi - 1.$$

Через β обозначим наибольшее число вершин графа G, удаление которых приводит к $\chi - 1$-критическому графу $G_\beta = G(V_\beta, X_\beta)$ с p_β вершинами.

Так как v_1 и v_2 не смежны, то $\chi(G - v_1 - v_2) = \chi - 1$. Откуда, $\beta \geq \chi$ и $p_\beta = p - \beta \leq \chi$. По теореме 4 имеем $G_\beta = K_{\chi-1}$. В случае, если $|V^1| = \chi, |V^2| = \chi - 2$, граф G^1 содержит $K_{\chi-1}$ и некоторую вершину w. Очевидно,

$$\exists u_1, u_2 \in V_\beta((v_1, u_1) \overline{\in} X \,\&\, (v_2, u_2) \overline{\in} X).$$

а) $u_1 = u_2 = u$. В этом случае, покрасив граф G_β $\chi - 1$ цветами, и придав вершинам v_1, v_2 цвет, приписанный вершине u, можно продолжить $\chi - 1$-раскраску на весь граф G.

б) $u_1 \neq u_2$. Нетрудно заметить, что в этом случае $\chi(G - w) = \chi$. В обоих случаях пришли к противоречию. Аналогичным путем придем к противоречию и в случае $|V^1| = |V^2| = \chi - 1$.

Следствие 2. *Для любого $\chi \geq 4$ не существует χ-реберно-критического 2-связного 2χ-вершинного графа.*

Следствие 3. *Для существования χ-реберно-критического ($\chi \geq 4$) $\varkappa$-связного ($2 \leqslant \varkappa \leqslant \chi - 1$) p-вершинного графа необходимо и достаточно, чтобы*

а) $p = \chi + 1$ *при* $\varkappa = \chi - 1$,

б) $p = \chi, \ldots, 2\chi - \varkappa$ *при* $3 \leq \varkappa \leq \chi - 2$,

в) $p = \chi, \chi + 1, \ldots, 2\chi - 2, 2\chi$ *при* $\varkappa = 2$.

Следствие 4. *Для существования χ-реберно-критического ($\chi \geq 4$) $\varkappa$-связного ($2 \leq \varkappa \leq \chi - 1$) p-вершинного графа необходимо и достаточно существование χ-критического $\varkappa$-связного p-вершинного графа.*

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ԴՅՈՒԼՈՒՄՅԱՆ

Ըստ ներկման կրիտիկական գրաֆների մասին

Հոդվածի հիմնական արդյունքը պարունակում է երրորդ հետևանքում, ուր տրված է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որպեսզի գոյություն ունենա χ-կոդային կրիտիկական $\varkappa$-կապակցված p-գագաթանի գրաֆ կամայական $\chi \geq 4$, $2 \leq \varkappa \leq \chi - 1$ և p դրական ամբողջ թվերի համար։

Հետևանք 3. χ-կոդային կրիտիկական ($\chi \geq 4$) $\varkappa$-կապակցված ($2 \leq \varkappa \leq \chi - 1$) p-գագաթանի գրաֆ գոյություն ունենալու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի

ա) $p \neq \chi + 1$, եթե $\varkappa = \chi - 1$,

բ) $p \neq \chi, \ldots, 2\chi - \varkappa$, եթե $3 \leq \varkappa \leq \chi - 2$,

գ) $p \neq \chi, \chi + 1, \ldots, 2\chi - 2\varkappa, 2\chi$, եթե $\varkappa = 2$;

Չորրորդ հետևանքում տրված է կապ χ-կոդային կրիտիկական և χ-կրիտիկական $\varkappa$-կապակցված ($2 \leq \varkappa \leq \chi - 1$) գրաֆների միջև։

Հետևանք 4. χ-կոդային կրիտիկական ($\chi \geq 4$) $\varkappa$-կապակցված ($2 \leq \varkappa \leq \chi - 1$) p-գագաթանի գրաֆ գոյություն ունենալու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի գոյություն ունենա χ-կրիտիկական $\varkappa$-կապակցված p-գագաթանի գրաֆ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Ф. Харари. Теория графов, «Мир», М., 1973. [2] B. Toft, J., North-Holland pub. comp., Am., V. 7, No 4 (1974).